

1. MODELLO DINAMICO AD UN GRADO DI LIBERTÀ

1 Alcune definizioni preliminari

I sistemi vibranti possono essere *lineari* o *non lineari*: nel primo caso vale il principio di sovrapposizione degli effetti¹ nel secondo no. In generale tutti i sistemi reali **non** sono lineari, ma possono essere considerati tali finché la sollecitazione in ingresso è piccola o essa è confinata entro certi campi ben definiti (*campi a comportamento lineare*); in generale si ricorre all' approssimazione di considerare il sistema lineare.

Un sistema (non necessariamente vibrante) è detto *a parametri costanti* se tutte le sue principali proprietà non dipendono dal tempo².

Si definisce *modello fisico*, la rappresentazione schematica del sistema reale; il *modello matematico* è, invece, la rappresentazione analitica (vale a dire in termini di equazioni) del precedente modello fisico. È evidente che uno stesso modello matematico può rappresentare più modelli fisici e più ancora sistemi reali³. Il modello fisico può essere a parametri *concentrati* o *distribuiti*⁴. Riferendoci ora ai soli sistemi vibranti, si può affermare che un modello fisico a parametri concentrati è caratterizzato dalla combinazione di tre soli elementi di base: masse, molle e smorzatori (Figura 1-1).



Figura 1-1. Elementi di base di un sistema vibrante.

Nella schematizzazione di un sistema reale mediante un modello fisico a parametri concentrati, i corpi sono considerati dotati di massa, ma non di elasticità, vale a dire che sono rigidi; le caratteristiche elastiche del sistema sono concentrate nelle molle (che sono prive di massa), mentre la dis-

¹ Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) stabilisce che se y_1 ed y_2 sono le risposte di uno stesso sistema agli input x_1 ed x_2 , allora la risposta del sistema all'input $a \cdot x_1 + b \cdot x_2$ sarà sicuramente: $a \cdot y_1 + b \cdot y_2$. Un sistema per il quale il legame tra la sollecitazione (o ingresso) e la risposta (o uscita) è del tipo $y = f(x) = a \cdot x^2$ non rispetta il PSE. In generale, nei modelli non lineari le variabili indipendenti (ad esempio, lo spostamento) non compaiono alla prima potenza ed, inoltre, non sono presenti prodotti tra le diverse variabili indipendenti.

² Un sistema elettrico è a parametri costanti se i valori delle sue resistenze, capacità ed induttanze sono costanti nel tempo.

³ Si noti che il modello matematico di uno stesso modello fisico può essere lineare o non lineare. Quindi uno stesso modello fisico può essere descritto anche con più modelli matematici (esempio del pendolo matematico, dove la forza di richiamo può essere legata al seno dell'angolo o all'angolo).

⁴ In generale, un modello fisico a parametri distribuiti è caratterizzato da un modello matematico ove compaiono equazioni differenziali alle derivate parziali, mentre un modello concentrato è caratterizzato da equazioni differenziali ordinarie.

sipazione di energia avviene ad opera degli smorzatori (si pensi ad uno smorzatore ad attrito o con fluido viscoso). In altri termini le proprietà inerziali dei corpi sono concentrate nelle masse, quelle elastiche nelle rigidità, mentre quelle dissipative negli smorzatori. Nella realtà, invece, tali proprietà coesistono nello stesso elemento: è questo il caso dei modelli fisici a parametri distribuiti⁵.

Una *molla* (o anche *molla lineare*, per sottolineare il fatto che la sua risposta è lineare) è un elemento che reagisce con una forza $-k \cdot (l - l_0)$ allorché viene allungato di $l - l_0$, dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla e k è la *costante elastica* o *rigidezza della molla*. In generale si pone la lunghezza a riposo della molla pari a zero.

Uno smorzatore viscoso è un elemento che introduce nel sistema una forza proporzionale, per mezzo del *coefficiente di smorzamento* c , alla velocità relativa \dot{l} dei suoi estremi; il verso di tale forza è opposto a quello della velocità relativa degli estremi⁶. Lo smorzatore viscoso, a differenza della molla lineare, non restituisce l'energia che immagazzina.

Le vibrazioni di un sistema sono dette *libere* o *forzate*⁷. Un sistema vibra liberamente se è perturbato dalla sua condizione di quiete e poi lasciato libero di vibrare; la perturbazione può avvenire mediante uno spostamento o mediante un urto⁸. Nel caso di vibrazioni forzate il sistema è sollecitato da una forza esterna e vibra a causa dell'azione persistente di quest'ultima.

2 Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso s può essere espresso sia nella sua forma cartesiana che polare:

$$s = \sigma + j\omega = \rho e^{j\varphi}; \text{ dove } \rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \text{ e } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right),$$

dove j è l'unità immaginaria ($j^2 = -1$).

Nella forma cartesiana, i numeri complessi sono punti nel piano di Gauss (o di Nyquist o anche di Argand) i cui assi coordinati sono detti *asse reale* ed *asse immaginario*, mentre nella forma polare sono punti del piano polare e la loro rappresentazione coincide con quella cartesiana a patto di considerare l'origine del piano polare coincidente con quella del piano di Gauss e l'asse reale coincidente con i valori nulli della fase. Sotto queste ipotesi, il numero complesso è invariante rispetto alla sua rappresentazione, vale a dire che il punto che lo rappresenta è il medesimo sia nella rappresentazione cartesiana che in quella polare.

⁵ Nelle tipiche applicazioni ingegneristiche si adottano sia modelli fisici a parametri concentrati che distribuiti.

⁶ Vale a dire che se gli estremi si allontanano, la forza viscosa tende a riavvicinarli e viceversa.

⁷ In generale, interessano le seconde, ma molto spesso per determinarle è necessario conoscere anche le prime.

⁸ Sarà più chiaro in seguito che nel primo caso le condizioni iniziali (necessarie ad integrare le equazioni differenziali) sono rappresentate da una posizione non nulla e da una velocità nulla, mentre nel secondo caso (sollecitazione per mezzo di un impulso) da una velocità non nulla e da una posizione nulla.

Nell'ambito delle vibrazioni si fa spesso riferimento ai numeri complessi pensandoli come vettori rotanti o *fasori*; a tale scopo in Figura 1-2 ne è data una semplice rappresentazione ed è riportata la relazione alla base delle cosiddette formule di Eulero.⁹

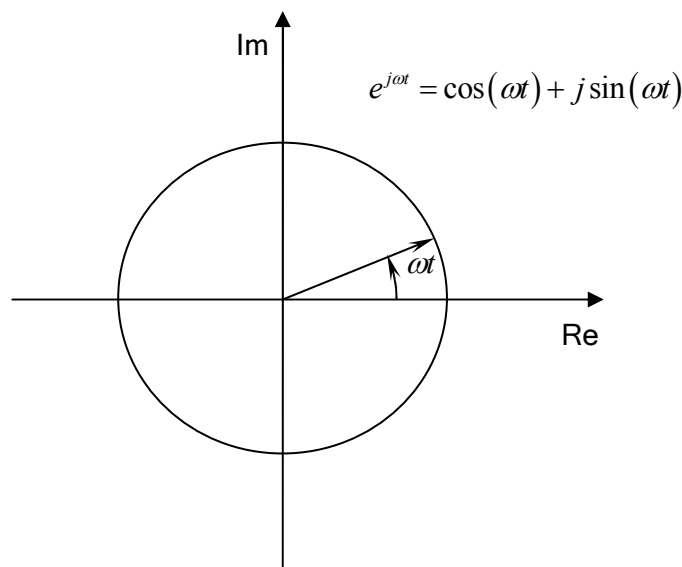


Figura 1-2. Rappresentazione di un fasore.

3 Oscillazioni libere senza smorzamento

Il più semplice modello fisico vibrante è costituito da una massa m collegata per mezzo di una molla di costante elastica k al "terreno" e che può oscillare in una sola direzione (ad esempio, x).

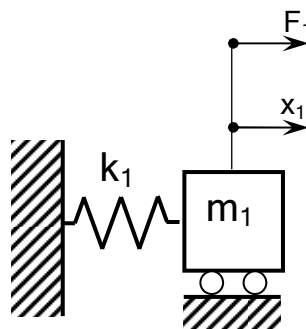


Figura 1-3. Sistema massa-molla.

L'equazione che governa tale modello è (non sono presenti forze esterne: il sistema una volta perturbato si pone in vibrazione):

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx ,$$

vale a dire:

⁹ Risulta: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$; $\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$; $\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

Questa equazione differenziale rappresenta il modello analitico associato al modello fisico di figura Figura 1-3 e consente, una volta risolto, di determinare l'andamento temporale $x(t)$. I sistemi reali che si possono studiare, evidentemente in maniera approssimata, con tale modello fisico sono rappresentati in figura Figura 1-4.

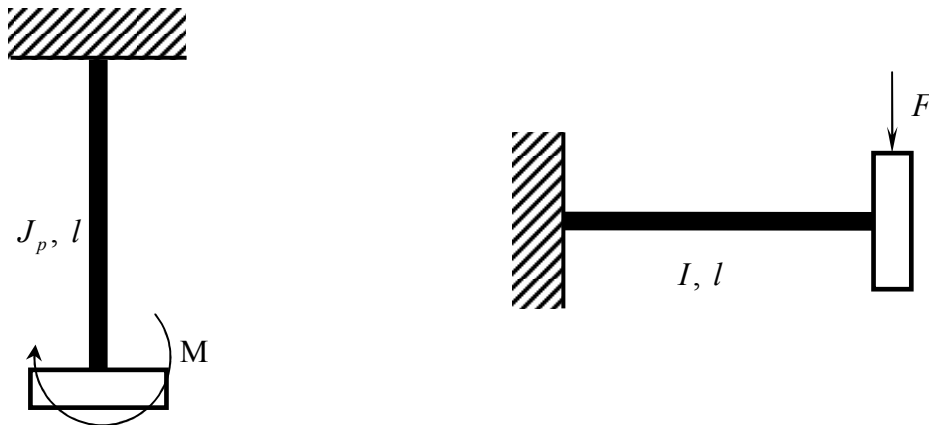


Figura 1-4. Sistemi analizzabili con il modello ad un grado di libertà senza smorzamento.

Definendo la quantità:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (1.2)$$

l'equazione del moto (1.1) diventa: $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$, che ha come soluzione¹⁰:

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad (1.3)$$

dove A e B sono costanti da determinare mediante le condizioni iniziali, vale a dire lo stato del sistema (in termini di posizione e velocità) all'istante iniziale dell'analisi vibratoria¹¹. La quantità ω_n prende il nome di *pulsazione propria* o *naturale* del sistema in quanto dipende dalle caratteristiche intrinseche del sistema (massa e costante elastica) e rappresenta la pulsazione dell'oscillazione

¹⁰ Si ricordi che vale il **teorema di esistenza ed unicità** della soluzione per cui una soluzione che soddisfa l'equazione differenziale (1.1) è la soluzione dell'equazione differenziale.

¹¹ Un'altra soluzione del tutto equivalente alla (1.3) è data dalla seguente: $x(t) = X \sin(\omega_n t + \psi)$, dove si è usata la funzione armonica $\sin(t)$, ma si sarebbe potuto usare anche la $\cos(t)$, determinando semplicemente un cambiamento della fase iniziale ψ .

Espandendo $X \sin(\omega_n t + \psi)$ appare chiaro che: $\begin{cases} X = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan \psi = B/A \end{cases}$. Utilizzando i fasori la soluzione si può anche scrivere:

$x(t) = A_1 e^{j\omega_n t} + B_1 e^{-j\omega_n t}$, dove le costanti sono grandezze complesse coniugate e risulta, applicando le formule di Eulero:

$A_1 = \frac{B - jA}{2}; B_1 = \frac{B + jA}{2}$. Si vuole far notare esplicitamente che le soluzioni riportate sono a meno di una differente espressione matematica del tutto identiche, essendo la soluzione di un stessa equazione differenziale.

libera del sistema. Il periodo delle oscillazioni libere vale chiaramente: $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$, mentre la loro fre-

$$\text{quenza vale: } f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Si utilizza il modello del sistema senza smorzamento qualora questo è fisicamente molto piccolo e/o non si interessa analizzare la risposta per un ampio intervallo di tempo. Si noti che conoscendo la deflessione statica della molla soggetta al solo peso della massa, si può facilmente ricavare la frequenza propria del sistema.

4 Oscillazioni libere con smorzamento

Considerando uno smorzatore viscoso¹² come quello discusso in precedenza, in questo caso l'equazione del moto si scrive:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.4)$$

dividendo tutto per la massa m e ponendo il *fattore di smorzamento* (o *smorzamento relativo*)

$$\delta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (13), \text{ l'equazione del moto diventa:}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (1.5)$$

La soluzione della precedente equazione differenziale può essere scritta nella forma (anche se non sempre: si veda in tal proposito 4.2):

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (1.6)$$

dove A e B sono due costanti che si determinano con le condizioni iniziali, mentre α_1 e α_2 sono le radici dell'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + 2\delta\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = (-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n \\ \alpha_2 = (-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n \end{cases} \quad (1.7)$$

A seconda del segno del discriminante $\delta^2 - 1$, si possono avere situazioni completamente differenti:

¹² Si intende ribadire chiaramente che il modello viscoso è solo uno dei modelli di smorzamento esistenti (smorzamento isteretico, ad attrito, ...). Il vantaggio del modello di smorzamento viscoso è che è molto facile da "trattare" matematicamente. Si noti, inoltre, che molte volte i fenomeni dissipativi sono dovuti al trasferimento di energia da un tipo ad un altro: si pensi alla vibrazione indotta da un colpo su un tavolo ed al fatto che si è persa energia a causa del fatto che udiamo un rumore.

¹³ Il fattore di smorzamento è una grandezza adimensionale.

4.1 $\delta > 1$ ($c^2 > 4km$)

Accade allorché il sistema è fortemente smorzato; in tal caso la risposta ad una perturbazione dallo stato di quiete è data da un moto aperiodico. Analiticamente la soluzione è:

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}, \text{ con } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali e negative} \tag{1.8}$$

In Figura 1-5 sono rappresentate varie soluzioni al mutare delle condizioni iniziali (C.I.).

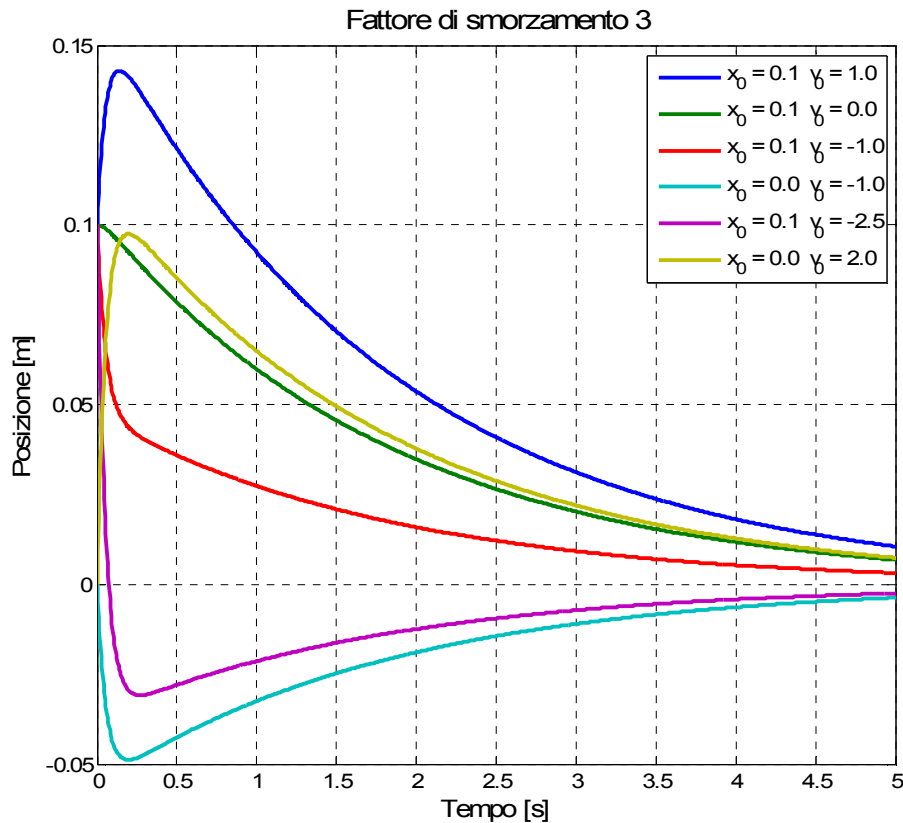


Figura 1-5. Andamento della risposta per sistemi ipercritici al variare delle C.I.

4.2 $\delta = 1$ ($c^2 = 4km$)

Le radici dell'equazione caratteristica sono reali, coincidenti e negative e valgono:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\omega_n$$

La soluzione analitica è:

$$x(t) = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t} \tag{1.9}$$

la quale rappresenta un *moto aperiodico critico*; il valore dello smorzamento è detto *smorzamento critico* e vale: $c = c_{cr} = 2\sqrt{km}$. Si noti che la soluzione dell'equazione differenziale (1.5) allorché $c = c_{cr}$ non può essere rappresentata dalla (1.6) giacché in tal caso non sarebbero soddisfabili generiche condizioni iniziali.

La Figura 1-6 riporta alcuni esempi di risposta per sistemi con smorzamento critico per diverse C.I.

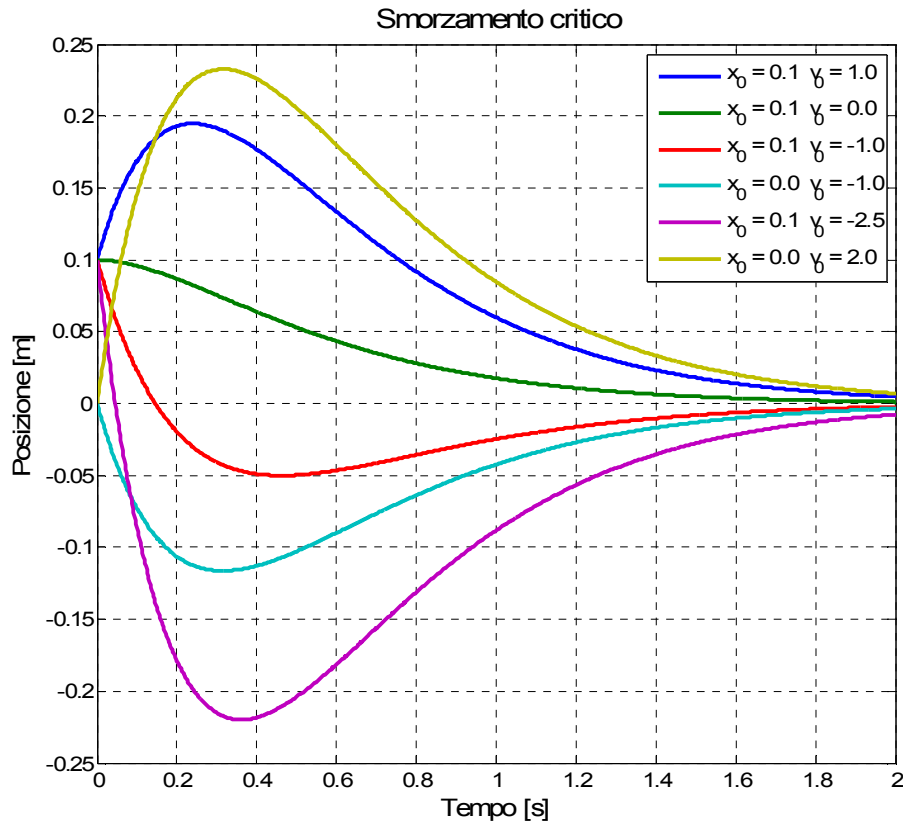


Figura 1-6. Esempi di risposte per un sistema con smorzamento critico al variare delle C.I.

4.3 $\delta < 1$ ($c^2 < 4km$)

Il sistema è poco smorzato: **è la quasi totalità dei casi di interesse ingegneristico**. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate. La soluzione nel dominio del tempo è:

$$x(t) = e^{-\delta\omega_n t} \left(A e^{j\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t} + B e^{-j\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t} \right) \tag{1.10}$$

Utilizzando le formule di Eulero, la (1.10) può essere riscritta nella forma:

$$x(t) = e^{-\delta\omega_n t} \left[A_1 \cos\left(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t\right) \right] \tag{1.11}$$

dove $A_1 = (A + B)$ e $B_1 = j(A - B)$, da determinare per mezzo delle condizioni iniziali. La soluzione (1.10) può essere anche scritta nella forma:

$$x(t) = C e^{-\delta\omega_n t} \cdot \cos\left(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t + \psi\right) \tag{1.12}$$

(a tale ultima espressione si farà nel seguito riferimento esplicito). La (1.12) rappresenta un moto armonico smorzato secondo le curve (inviluppanti) $\pm C e^{-\delta\omega_n t}$. Il moto non è propriamente periodico in quanto le ampiezze si riducono ed è detto pertanto *pseudoperiodico*. La pulsazione dell'oscillazione smorzata vale:

$$\omega_{ns} = \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \tag{1.13}$$

A tale pulsazione corrisponde un pseudoperiodo oscillatorio $T_s = \frac{2\pi}{\omega_{ns}}$, dato dal tempo che intercorre tra due punti di tangenza consecutivi sulla stessa curva di estinzione.

La Figura 1-7 riporta un esempio di risposta per un sistema con piccolo smorzamento. Le costanti di integrazione sono determinate a partire dalle C.I. nel seguente modo:

$$\begin{cases} \psi = \arctan \left(-\frac{v_0/x_0 + \delta \cdot \omega_n}{\omega_{ns}} \right) \\ C = \frac{x_0}{\cos \psi} \end{cases}$$

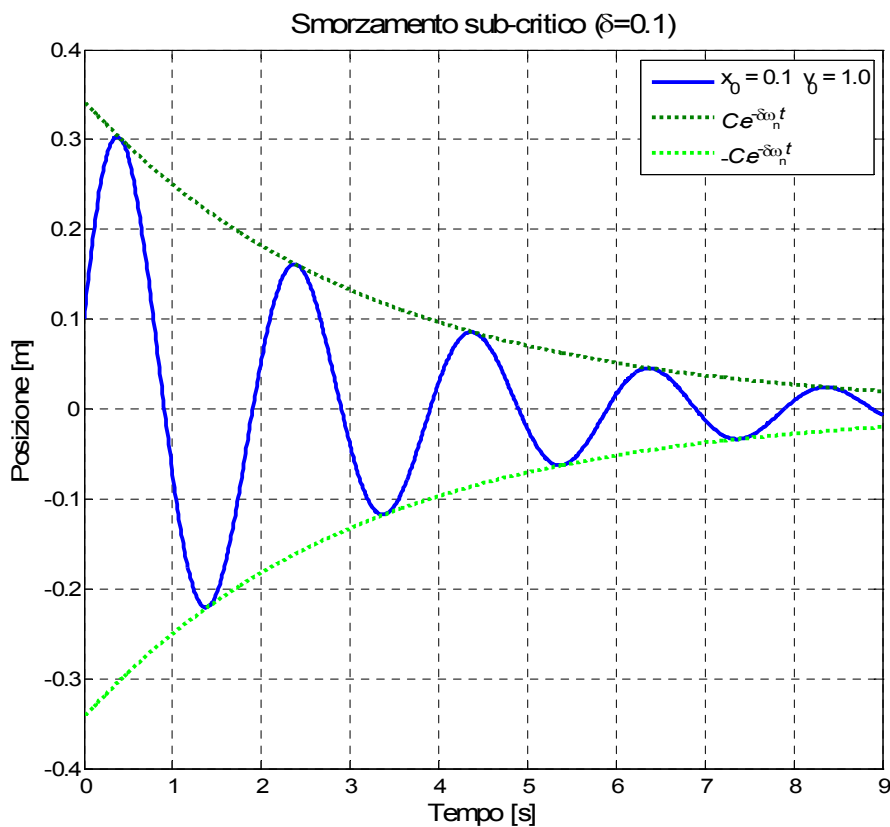


Figura 1-7. Esempio di risposta per un sistema poco smorzato.

La pulsazione propria o naturale di un sistema smorzato è data dalla (1.13) e differisce pertanto dalla quantità desumibile da (1.2) per un fattore $\sqrt{1-\delta^2}$; ciò consente di affermare che la pulsazione propria di un sistema smorzato **differisce** da quella di un sistema non smorzato. In realtà, nei comuni casi di interesse ingegneristico $\delta < 0.1$, la differenza numerica tra le due quantità può essere realmente piccola.

Una particolarità della risposta (1.12) consiste nel fatto che il rapporto tra due picchi consecutivi è costante nel tempo; il suo logaritmo naturale vale:

$$\xi = \ln \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} \right) = 2\pi \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \approx 2\pi\delta \quad (1.14)$$

La quantità ξ è definita *decremento logaritmico* ed è utile per ricavare lo smorzamento del sistema dalla misura della sua risposta nel tempo: basta determinare il logaritmo naturale dell'ampiezza di due picchi consecutivi e quindi ricavare δ applicando la (1.14).

4.4 La soluzione nel piano complesso

L'equazione differenziale (1.4) può essere risolta anche considerando una soluzione del tipo:

$$x(t) = X e^{st} \quad (1.15)$$

con s variabile complessa.

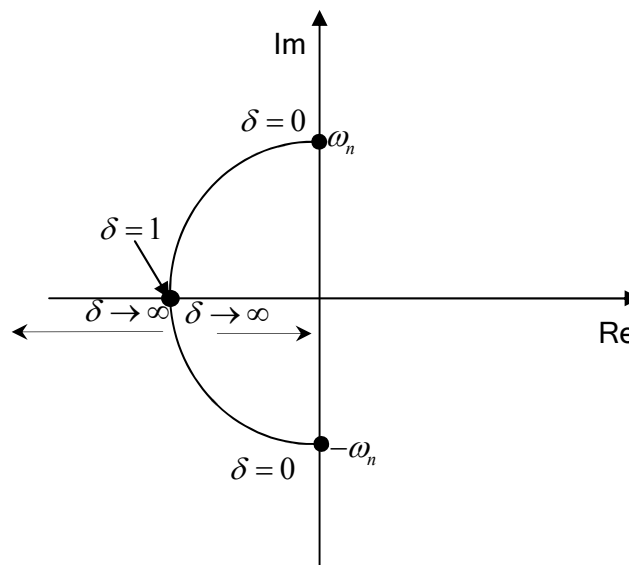


Figura 1-8. Posizione dei poli nel piano complesso al variare dello smorzamento.

Le diverse soluzioni s dell'equazione caratteristica (1.7) -scritta questa volta in funzione di s - al variare dei parametri (m , c e k) del sistema e descritte in 4.1-4.3 possono essere rappresentate mediante il piano complesso riportando in ascissa la parte reale di s ed in ordinata quella immaginaria (si veda la Figura 1-8). Il sistema meccanico (con i diversi parametri reali e positivi) risulta sempre stabile o, quando lo smorzamento è nullo, al limite di stabilità (soluzioni completamente immaginarie). Fisicamente, un sistema vibrante al limite di instabilità, una volta perturbato dal suo stato di quiete, comincia a vibrare per un tempo indefinito non essendo presente alcuno smorzamento che attenua la vibrazione. All'aumentare dello smorzamento i poli (ossia le radici) dell'equazione caratteristica hanno una parte reale ed una immaginaria: la parte reale è responsabile della riduzione dell'oscillazione nel tempo, mentre quella immaginaria fornisce la pulsazione della componente oscillante. Quando lo smorzamento è quello critico, le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidono ed i due rami del luogo delle radici si "immergono" sull'asse reale ed il moto è aperiodico critico. All'aumentare ancora dello smorzamento, le soluzioni sono entrambe reali e si allontanano sempre di più dal punto d'immersione.

5 Oscillazioni forzate

Come tipica sollecitazione forzante prendiamo in considerazione il caso della forzante armonica: tale caso è di effettivo interesse pratico in quanto, per il teorema di Fourier, una qualsiasi funzione periodica può essere scomposta in una serie di funzioni armoniche e, ricorrendo alla trasformata di Fourier, una qualsiasi funzione del tempo può essere scomposta come la sommatoria di infinite funzioni armoniche. Data la validità del PSE, una volta nota la soluzione ad una generica sollecitazione armonica è possibile determinare la soluzione ad una qualsiasi forzante.

In questo caso, per alleggerire la trattazione, scriviamo la funzione armonica, di pulsazione ω in termini complessi¹⁴: $f(t) = Fe^{j\omega t}$.

L'equazione del moto del sistema è:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.16)$$

La risposta del sistema sarà una funzione armonica del tipo: $x(t) = Xe^{j\omega t}$; sostituendola nell'equazione del moto si ottiene:

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k)Xe^{j\omega t} = Fe^{j\omega t}$$

da cui si ricava: $X = \frac{F}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)}$. X è una grandezza complessa ($X = X(j\omega)$), che si può

scrivere nel seguente modo: $X = |X|e^{-j\phi}$; in questo modo la risposta è: $x(t) = |X|e^{j(\omega t - \phi)}$. Il modulo e la fase di X valgono:

$$|X| = \frac{F}{k \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (1.17)$$

$$\tan \phi = \frac{2\delta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si noti che la risposta è in ritardo rispetto all'eccitazione della quantità ϕ . Nel caso generale di un sistema sollecitato da una forzante armonica, la sua risposta sarà del tipo:

$$x(t) = Ce^{-\delta\omega_n t} \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \delta^2} \omega_n t + \psi\right) + |X| \cos(\omega t - \phi)$$

¹⁴ In realtà la quantità $f(t) = Fe^{j\omega t}$ è una grandezza complessa, più propriamente risulta: $f(t) = \Re e(Fe^{j\omega t}) = F \cos(\omega t)$. Si noti, inoltre, che la precedente scrittura ipotizza implicitamente che la fase sia nulla, ma ciò non costituisce un problema visto che per ottenere ciò basta scegliere opportunamente l'origine dei tempi.

In altri termini, la risposta del sistema oscillante consiste in una parte vibratoria smorzata caratterizzata dalla frequenza propria ω_{ns} ed in una parte vibratoria stazionaria con pulsazione pari a quella della sollecitazione esterna. In Figura 1-9 sono riportati due esempi di risposte per due diversi valori della pulsazione della forzante: in entrambi i casi dopo un transitorio più o meno lungo rimane solo la risposta forzata.

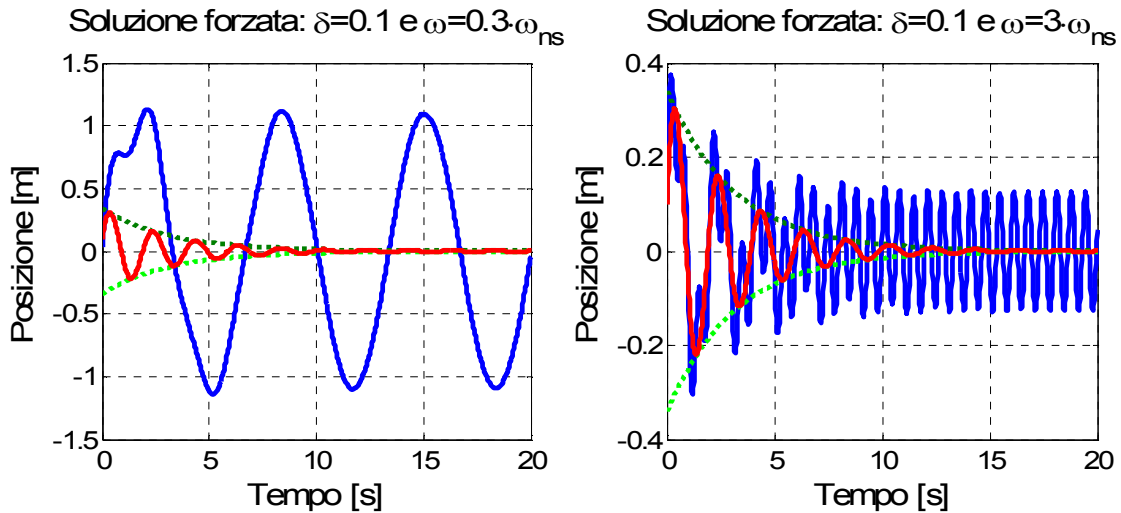


Figura 1-9. Esempi di soluzioni forzate con C.I. non banali.

La quantità $\frac{F}{k}$ rappresenta la risposta del sistema ad una sollecitazione a frequenza nulla (vale a dire ad una sollecitazione statica).

La quantità $\frac{X}{F/k}$ pari al rapporto tra l'ampiezza della risposta armonica stazionaria (vale a dire in condizioni di regime, dopo che si è esaurito il transitorio iniziale) e l'ampiezza della risposta statica prende il nome di *fattore di amplificazione* o di *recettanza*, il suo modulo vale:

$$|H(\omega)| = |\alpha(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (1.18)$$

La (1.18) consente di ricavare immediatamente l'ampiezza della risposta una volta che sia nota quella della forzante. È evidente come l'ampiezza della risposta dipenda oltre che dal valore della forzante anche dalla sua frequenza ($\alpha = \alpha(\omega)$); l'amplificazione, per una pulsazione della forzante pari a quella naturale del sistema non smorzato ($\omega = \omega_n$) vale $\alpha = \frac{1}{2\delta}$ e se il sistema non è

smorzato la risposta a regime del sistema tende ad infinito¹⁵. All'aumentare della frequenza della forzante il sistema "risponde sempre di meno", l'amplificazione tende a zero ed il sistema tende sempre di più a stare fermo: tale comportamento è del tutto intuitivo non avendo il sistema il tempo di adeguarsi alla sollecitazione in ingresso.

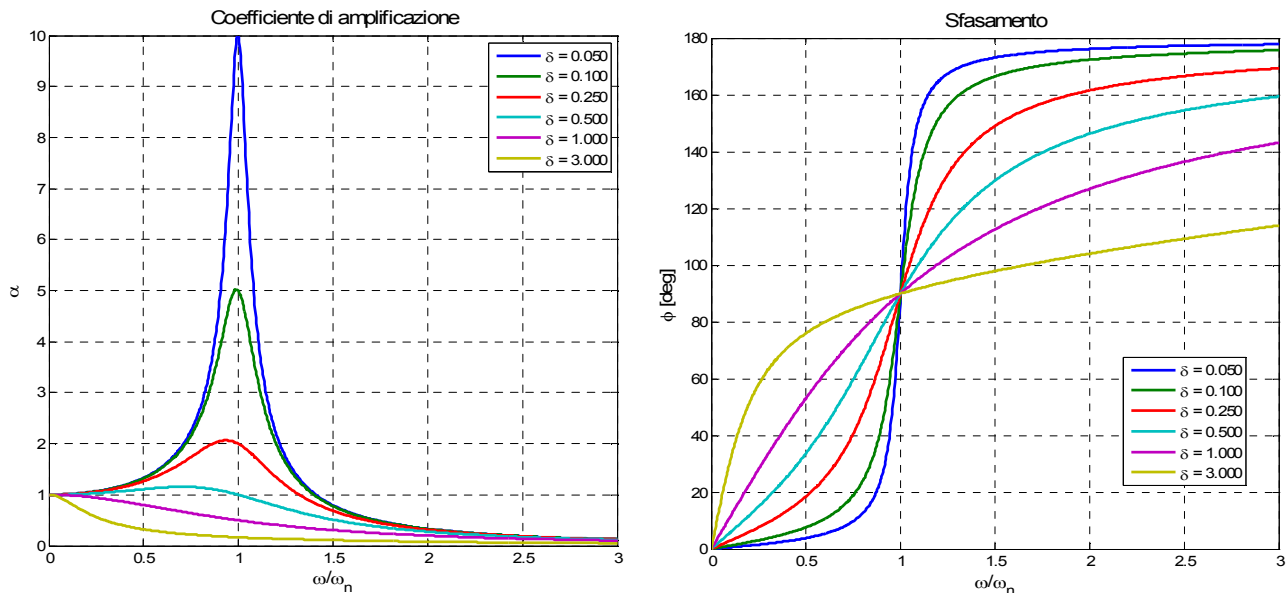


Figura 1-10. Rappresentazioni della recettanza e dello sfasamento.

La Figura 1-10 riporta graficamente la ricettanza (a volte anche detta *coefficiente di amplificazione dinamica del carico*), nonché lo sfasamento della risposta forzata per diversi valori del fattore di smorzamento al variare della pulsazione della forzante.

5.1 Risposta di un sistema non smorzato in condizioni di risonanza

Si badi che la risposta a regime del sistema tende ad infinito, **non** che l'ampiezza della risposta di un sistema non smorzato in condizioni di risonanza è pari ad infinito. Per evidenziare chiaramente tale aspetto basta calcolare la risposta forzata di un sistema non smorzato inizialmente in quiete soggetto ad una forzante cosinusoidale:

$$m\ddot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

La soluzione è composta da un integrale particolare e dall'omogenea associata:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) + \frac{F \cos(\omega t)}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

Le condizioni iniziali di quiete impongono:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

¹⁵ In realtà, l'amplificazione è massima per una pulsazione leggermente inferiore a quella propria; ciò è tanto più vero quanto maggiore è lo smorzamento (si veda anche la Figura 1-10).

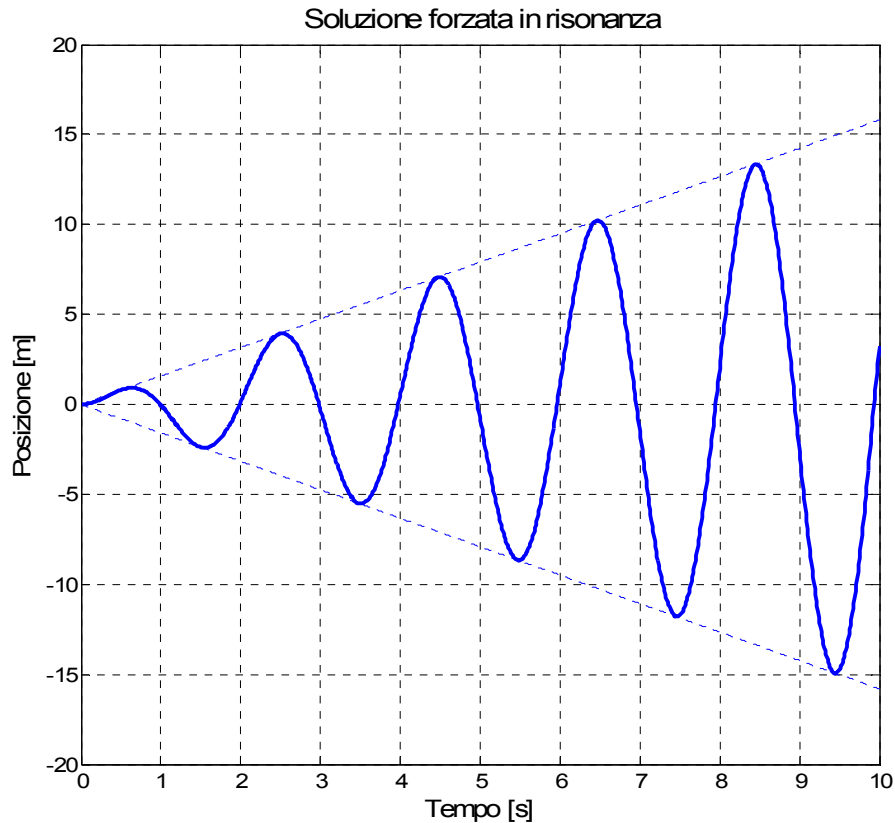


Figura 1-11. Soluzione forzata in risonanza ed assenza di smorzamento.

Imponendo tali condizioni iniziali (C.I.):

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{F}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

pertanto la risposta complessiva del sistema si scrive:

$$x(t) = \frac{F}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)]$$

In condizioni di risonanza ($\omega = \omega_n$), l'espressione precedente risulta indeterminata ($\frac{0}{0}$); sviluppando $\cos(\omega t)$ in serie di Taylor con centro ω_n fino al primo ordine si ottiene¹⁶:

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega_n t) - t \sin(\omega_n t) \cdot (\omega - \omega_n)$$

La soluzione diventa:

$$x(t) = \frac{F}{m(\omega_n + \omega)(\omega_n - \omega)} [-t \sin(\omega_n t) \cdot (\omega - \omega_n)]$$

che ponendo $\omega = \omega_n$ diventa:

¹⁶ Si faccia attenzione al fatto che, in tale circostanza, la variabile indipendente è ω e non t .

$$x(t)|_{\omega=\omega_n} = \frac{t \cdot F \sin(\omega_n t)}{2m\omega_n}$$

La soluzione (rappresentata in Figura 1-11) è, quindi, sfasata di 90° rispetto all'eccitazione ed ha un'ampiezza che cresce linearmente con il tempo: a regime diventa infinita. E' chiaro che nella realtà la risposta non potrà mai diventare infinito a causa del subentrare di un comportamento non lineare, della nascita di uno smorzamento ed, ovviamente, della rottura del sistema. La circostanza, inoltre, che l'ampiezza della risposta diventa infinita solo dopo un tempo infinito giustifica matematicamente la possibilità di "attraversare" la condizione di risonanza: è il caso di tutti i sistemi che lavorano stabilmente in condizioni ipercritiche: basta attraversare la condizione di risonanza rapidamente in modo da non dare il tempo alla risposta di "crescere" troppo (con evidenti problemi).

5.2 Dissipazione di un sistema smorzato in risonanza

La soluzione stazionaria di un sistema smorzato soggetto ad una sollecitazione armonica¹⁷ cosinusoidale è come detto: $x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$; in condizioni di risonanza, essendo $\omega^2 = \omega_n^2 = \frac{k}{m}$, risulta $m\ddot{x} + kx = 0$; di conseguenza, l'equazione del moto si scrive:

$$c\dot{x} = -c\omega_n X \sin(\omega_n t - \phi) = F \cos(\omega_n t)$$

Fisicamente, ciò significa che in condizioni di risonanza la forza smorzante equilibra istante per istante la forzante esterna; in altri termini, in condizioni di risonanza l'energia fornita al sistema dalla forza esterna serve ad equilibrare le perdite dovute alle forze viscosse.

5.3 Forzante Periodica

Nel caso in cui il sistema vibrante sia sollecitato da una forzante periodica nel tempo, tale per cui:

$$F(t) = F(t+T) = F\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (1.19)$$

la quantità T è detta *periodo* della forzante, mentre ω è definita *pulsazione fondamentale*.

In tal caso, per il teorema di Fourier, l'analisi vibratoria del sistema può essere facilmente condotta decomponendo la forzante nelle sue armoniche ed utilizzando il PSE. Nel caso in cui la forzante soddisfi le condizioni per cui essa è decomponibile nella *serie di Fourier*, si può scrivere quanto segue¹⁸:

$$F(t) = F_0 + \sum_{l=1}^{\infty} F_l \cos(l\omega t + \varphi_l) \quad (1.20)$$

¹⁷ L'equazione del moto è ovviamente la $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$

¹⁸ Fisicamente, F_0 rappresenta il valore medio della forzante; la (1.20) si traduce quindi in una decomposizione della forzante nella quale si separa il suo valore medio dalle sue oscillazioni attorno ad esso.

oppure, equivalentemente:

$$F(t) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(l\omega t) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin(l\omega t) \quad (1.21)$$

I coefficienti a_l e b_l si possono ottenere dalla (1.21) semplicemente moltiplicando, rispettivamente, per $\cos(l\omega t)$ e $\sin(l\omega t)$ ed integrando sul periodo T ¹⁹, per cui si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt, \quad a_l = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(l\omega t) dt, \quad b_l = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(l\omega t) dt \quad (1.22)$$

Ovviamente, le relazioni (1.20) ed (1.21) sono legate dalle ovvie relazioni:

$$F_l = \sqrt{a_l^2 + b_l^2} \quad \text{e} \quad \tan \varphi_l = \frac{b_l}{a_l}$$

E' da notare che sebbene le espressioni precedenti forniscano una formulazione analitica per determinare i diversi coefficienti della serie armonica di Fourier, **non** è affatto detto che sia possibile la loro determinazione in forma chiusa per una qualsiasi funzione periodica; com'è ben noto, infatti, non esistono gli integrali in forma chiusa di una generica funzione integranda. Quando la risoluzione in forma chiusa degli integrali (1.22) non è possibile si può ovviamente *procedere per via numerica* oppure mediante *analizzatori spettrali di segnale*. Si noti che in questi casi non si determinano, ovviamente, tutte le componenti armoniche, ma solo quelle che si trovano entro un certo intervallo di frequenza, vale a dire quelle per cui risulti $l \cdot 2\pi\omega < f_{\max}$, dove f_{\max} è scelto di volta in volta a seconda del problema in esame. Si procede in tal modo per due ragioni:

- all'aumentare dell'ordine l , le ampiezze delle armoniche diventano sempre più piccole, ciò vuol dire che il loro contributo alla formazione della risposta del sistema sempre più trascurabile.
- all'aumentare dell'ordine, l'errore col quale si determinano le componenti armoniche, nel caso in cui esse siano determinate con un analizzatore spettrale, aumenta sempre di più perché diventa sempre più piccolo il rapporto segnale/rumore, con il risultato di mal stimare l'effettiva risposta del sistema.

¹⁹ Si ricordi che l'integrale di $\cos(l\omega t)$ e $\sin(l\omega t)$ nel periodo T è nullo, così come è nullo l'integrale sul periodo di $\cos(l\omega t) \cdot \sin(h\omega t)$, mentre dei diversi integrali del tipo $\int_0^T \cos(l\omega t) \cdot \cos(h\omega t) dt$ rimane solo quello per cui $h = l$ e

ciò vale anche per gli integrali del tipo $\int_0^T \sin(l\omega t) \cdot \sin(h\omega t) dt$.

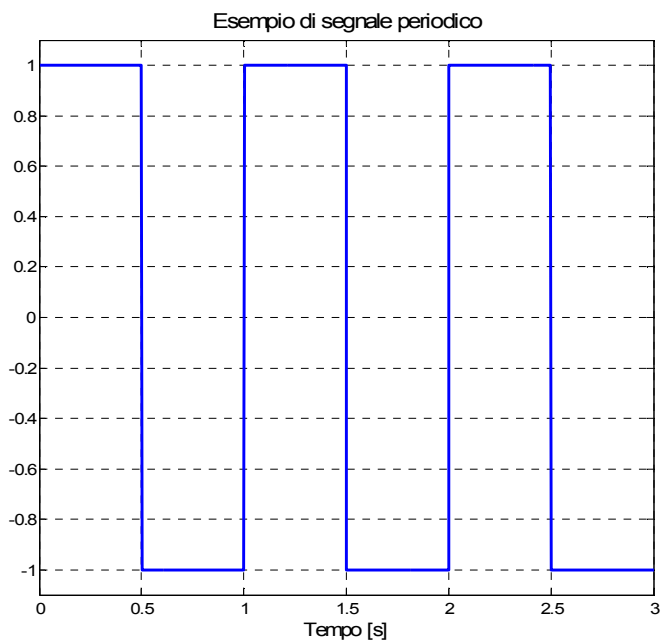


Figura 1-12. Onda quadra come esempio di segnale periodico.

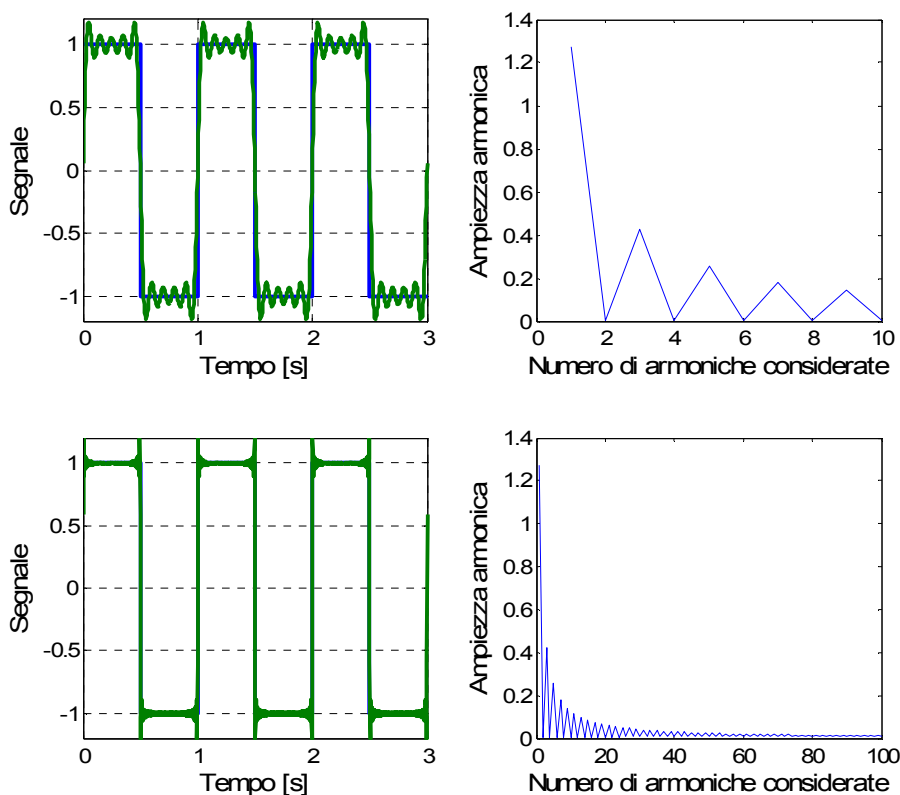


Figura 1-13. Esempio di analisi di Fourier²⁰: nel primo caso si considerano 10 armoniche, nel secondo 100.

²⁰ Le armoniche pari sono mancanti, per cui si ritrova che la funzione è dispari.

Una volta espressa la funzione periodica mediante la serie di Fourier, la risposta **forzata** del sistema si può ottenere semplicemente in virtù del PSE:

$$x(t) = |X|_0 + \sum |X_l| \cos(l\omega t + \varphi_l - \phi_l) \quad (1.23)$$

dove i diversi termini sono calcolabili applicando semplicemente le formule viste in precedenza. Il termine $|X|_0$ rappresenta la risposta del sistema al valore medio della forzante e vale pertanto:

F_0/k . Affinché ci sia risonanza basta, ovviamente, che una delle armoniche della forzante eccitante coincida con la frequenza propria del sistema. Si noti che la precedente espressione fornisce la risposta forzata del sistema e non la risposta complessiva, per ottenere la quale è necessario sommare la risposta libera che si determina imponendo che la risposta complessiva del sistema soddisfi le CI. Nel caso di forzante periodica, le costanti della risposta libera si determinano:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = \arctan \left\{ \frac{v_0 + \sum_{l=1}^{\infty} k\omega |X_l| \sin(\varphi_l - \phi_l)}{-\left[x_0 - \sum_{l=1}^{\infty} |X_l| \cos(\varphi_l - \phi_l) \right]} - \delta\omega_n \right\} \\ C = \frac{x_0 - \sum_{l=1}^{\infty} |X_l| \cos(\varphi_l - \phi_l)}{\cos\psi} \end{array} \right\} \omega_{ns} \quad (1.24)$$

Provare, per esercizio, a determinare la risposta di un sistema all'onda quadra per diversi valori di rigidezza, e determinare per quale valore si verifica risonanza.

5.4 Forza eccitante arbitraria

In tale circostanza (l'unica, in realtà, che ha senso da un punto di vista strettamente fisico, non essendo mai un sistema soggetto ad una forzante per un tempo infinito), la forzante non è periodica ed agisce per di più per un tempo finito. La vibrazione del sistema si può ottenere considerando due distinti approcci:

Approccio nel dominio della frequenza: generalizzando l'approccio adottato per le funzioni periodiche e facendo, quindi, ricorso alla trasformata di Fourier.

Approccio nel dominio del tempo: considerando la forzante costituita da una serie di impulsi elementari aventi diverse ampiezze.

In quel che segue si farà prima riferimento all'approccio nel dominio del tempo, quindi a quello nel dominio della frequenza.

5.4.1 Approccio nel dominio del tempo: impulso unitario o delta di Dirac

L'impulso unitario è definito come il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ della funzione rettangolare $\delta_\varepsilon(t)$: quest'ultima assume il valore ε^{-1} per $t \in [a, a + \varepsilon]$ ed il valore nullo al di fuori di tale intervallo. Ovviamente, a è l'istante temporale di applicazione dell'impulso.

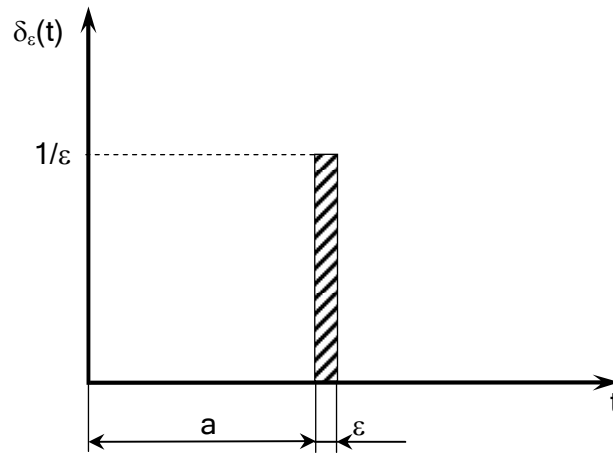


Figura 1-14. Delta di Dirac.

Matematicamente, il delta di Dirac è definibile nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t-a) = 0, \quad t \neq a \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \delta(t-a) dt = F(a) \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Si definisce ora come *forza impulsiva* all'istante di tempo a la quantità:

$$F(t) = F_0 \delta(t-a) \quad (1.26)$$

Nel caso in esame, il delta di Dirac ha le dimensioni $[T^{-1}]$, mentre F_0 ha le dimensioni $[MLT^{-1}]$.

L'impulso elementare agente al tempo a vale, per definizione: $dI = F(t) dt$, ovvero, $dI = F_0 \delta(t-a) dt$.

Eccitando il sistema vibrante a partire dal suo stato di quiete per mezzo dell'impulso dI si ottiene, applicando il teorema dell'impulso secondo il quale l'impulso elementare è pari alla variazione di quantità di moto del sistema:

$$dI = m dv$$

(il sistema vibrante è, ovviamente, a massa costante per cui risulta $dm = 0$). Integrando la precedente relazione su tutto l'arco temporale si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dI = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0 \delta(t-a) dt = \int_0^v mdv = mv \Rightarrow v = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F_0 \delta(t-a) dt}{m} = \frac{F_0}{m} \Rightarrow v(t=a) = \frac{F_0}{m} \quad (1.27)$$

Ciò vuol dire che a seguito dell'applicazione della forza impulsiva al tempo a , il sistema vibrante passa da uno stato di quiete ad uno in cui risulta:

$$\begin{cases} x(t=a) = 0 \\ \dot{x}(t=a) = \frac{F_0}{m} \end{cases} \quad (1.28)$$

In altri termini, l'applicazione della forza impulsiva causa una repentina variazione di velocità, ma non di posizione (la qual cosa è anche del tutto in accordo con il comune senso fisico). Le (1.28) costituiscono quindi le condizioni iniziali per il problema di un sistema vibrante in oscillazione libera sottoposto alla forza impulsiva (1.26). La soluzione libera nel caso generale si è visto che vale:

$$x(t) = C e^{-\delta \omega_n t} \cdot \cos(\sqrt{1-\delta^2} \omega_n t + \psi)$$

Applicando le C.I. date in (1.28), considerando $t=0$ come istante di tempo di applicazione dell'impulso, si ottiene:

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\sqrt{1-\delta^2}\omega_n} e^{-\delta \omega_n t} \cdot \cos\left(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right), t \geq 0$$

ricordando che $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$, la risposta del sistema vibrante alla forza impulsiva (1.26)

vale:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{1-\delta^2}\omega_n} e^{-\delta \omega_n t} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t\right), t \geq 0 \quad (1.29)$$

Nel caso in cui l'impulso elementare è unitario, vale a dire che risulta $F_0 = 1$, la risposta del sistema vale:

$$h(t) = \frac{1}{m\sqrt{1-\delta^2}\omega_n} e^{-\delta \omega_n t} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\delta^2}\omega_n t\right), t \geq 0 \quad (1.30)$$

La precedente equazione rappresenta la risposta del sistema all'impulso unitario (detta anche *risposta elementare all'impulso unitario*). Ovviamente risulta $x(t) = F_0 h(t)$, la quale indica che conoscendo la risposta elementare all'impulso unitario è semplicissimo conoscere la risposta del sistema ad un qualsiasi impulso.

Inoltre, decomponendo la forzante eccitatrice come una sommatoria (al limite infinita) di impulsi elementari ($F(\tau) d\tau$) è possibile conoscere la risposta del sistema come sommatoria (al limite infi-

nita) delle risposte del sistema ai diversi impulsi elementari. Detta, quindi²¹, $F_0(\tau) = F(\tau)d\tau$ l'ampiezza dell'impulso applicato al sistema al tempo τ , la risposta elementare del sistema al tempo t a tale impulso sarà: $F_0(\tau) \cdot h(t-\tau)$, ossia: $F(\tau)d\tau \cdot h(t-\tau)$. La risposta a regime di un sistema sottoposto ad una serie di impulsi elementari $F(\tau)d\tau$ sarà pari alla sommatoria delle precedenti risposte:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau = F(t) * h(t) \quad (1.31)$$

dove con il simbolo * si è indicato il *prodotto convolutorio*. Il senso della (1.31) è il seguente: la risposta al tempo t del sistema è data dalla somma delle risposte elementari agli impulsi elementari ($F(\tau)d\tau$) in cui si pensa suddivisa la forzante $F(t)$. Si noti che il prodotto convolutorio gode della seguente proprietà:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau = F(t) * h(t) = \int_0^t h(\lambda)F(t-\lambda)d\lambda = h(t) * F(t) \quad (1.32)$$

Per provarla basta semplicemente considerare un cambio di variabile $\lambda = t - \tau$.

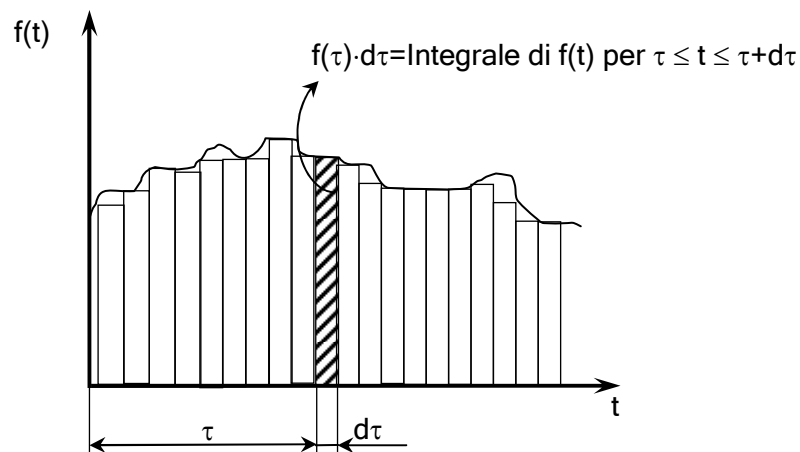


Figura 1-15. Discretizzazione della forzante per mezzo di un treno di impulsi

²¹ Per maggiore coerenza formale l'istante di tempo in corrispondenza del quale è applicato l'impulso non è più indicato con α , ma con τ

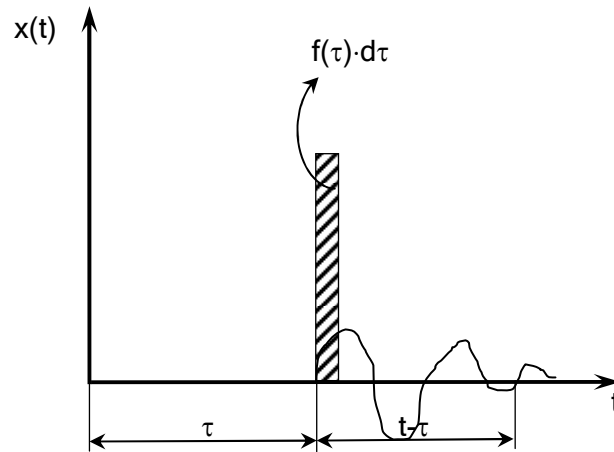
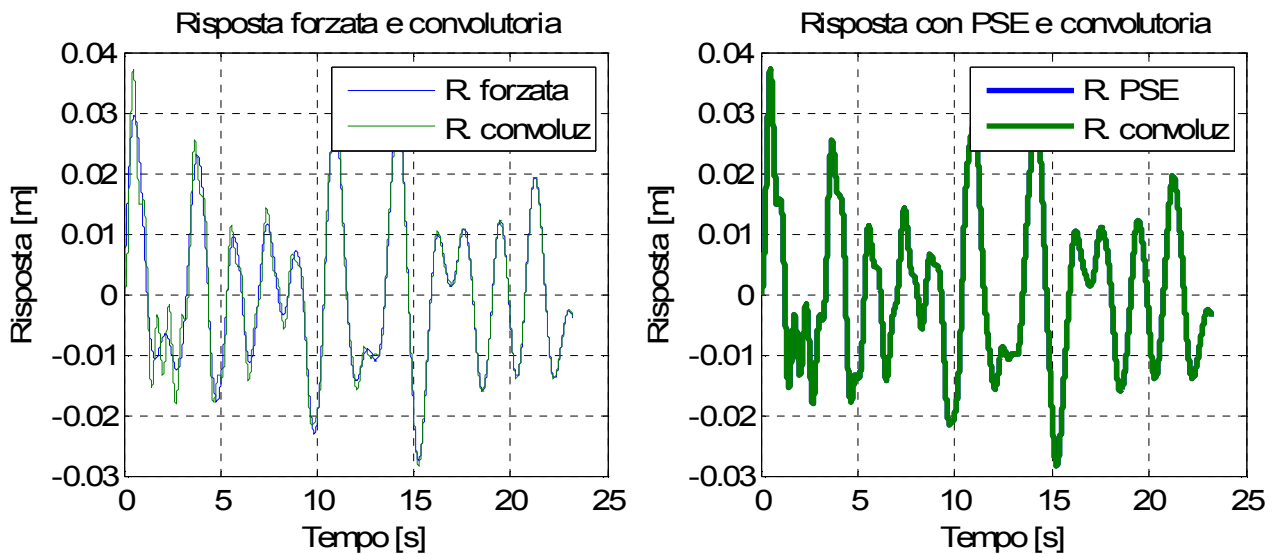


Figura 1-16. Risposta del sistema al singolo impulso.

E' da notare che il prodotto di convoluzione si può utilizzare per determinare la risposta del sistema sia quando questo è soggetto ad una sollecitazione arbitraria sia quando la sollecitazione è periodica; indipendentemente dal tipo di sollecitazione il prodotto convolutorio tiene automaticamente conto delle CI nulle. Utilizzando il PSE nel caso, ad esempio, di forzante periodica, è necessario considerare esplicitamente la presenza di CI nulle.



5.4.2 Approccio nel dominio della frequenza

Prima di affrontare il caso generale, si ritiene utile ricordare che, come si è avuto modo di vedere in precedenza, nel momento in cui il sistema è sollecitato con una forza armonica, di ampiezza diciamo unitaria²²: $F(\omega) = e^{j\omega t}$, la sua risposta è del tipo: $x(\omega) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Sostituendo tale espressione nell'equazione del moto si ottiene l'espressione della *funzione di risposta in frequenza*.

²² Si preferisce in questa circostanza esplicitare la dipendenza dalla frequenza anziché dal tempo: è chiaro, peraltro, che la forzante armonica è una funzione sia del tempo che della frequenza. Si ricordi, inoltre, che ci si riferisce sempre alla parte reale, anche se ciò non viene scritto esplicitamente.

$$H(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega c + k} \quad (1.33)$$

il cui modulo e la cui fase sono già state diagrammate per differenti valori di smorzamento.

Essendo $H(j\omega)$ una grandezza complessa, la si può anche scrivere come il prodotto del suo modulo per la fase²³: $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\phi}$. La risposta del sistema ad una forzante armonica di ampiezza unitaria è pertanto: $x(\omega) = |H(j\omega)|e^{j(\omega t - \phi)}$; se l'ampiezza della forzante fosse stata $F_0(\omega)$, la risposta sarebbe stata pari a: $x(\omega) = |H(j\omega)|F_0(\omega)e^{j(\omega t - \phi)}$, in altri termini sarebbe stata una funzione armonica avente la stessa pulsazione dell'eccitazione, ampiezza $|H(j\omega)|F_0(\omega)$ ed in ritardo della quantità ϕ .

Quando l'eccitazione non è armonica e non è periodica, si deve ricorrere, per la sua analisi nel dominio della frequenza alla trasformata di Fourier. In pratica, dal punto di vista formale è come se si considerasse la generica funzione del tempo $f(t)$ periodica con periodo infinito, ciò vuol dire che la pulsazione fondamentale è infinitesima ($d\omega$) e che le armoniche non sono più discrete, ma continue (la distanza tra un'armonica e la successiva è infinitesima e pari a $d\omega$).

Matematicamente, la trasformata di Fourier vale:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.34)$$

mentre l'anti-trasformata vale:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{+j\omega t} d\omega \quad (1.35)$$

A questo punto è chiaro come è necessario procedere, nel dominio della frequenza, quando il sistema è sollecitato per mezzo di una funzione arbitraria:

- Si calcola la trasformata di Fourier della funzione eccitante
- Si determina la risposta nel dominio della frequenza facendo ricorso alla funzione di risposta in frequenza: $X(\omega) = H(j\omega) \cdot F(\omega)$

In merito all'ultimo punto basta osservare che la risposta alla forzante arbitraria sarà una funzione del tempo la cui trasformata di Fourier si potrà scrivere come $X(\omega)$. Risulterà, pertanto:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{+j\omega t} d\omega$$

Portando ora la derivata sotto il segno d'integrale risulta chiaro che:

²³ Con ϕ si è inteso indicare una quantità positiva, il segno meno indica che la risposta è in ritardo rispetto all'eccitazione.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega \\ \ddot{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega \end{cases}$$

L'equazione del moto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

passando dal dominio del tempo a quello della frequenza, si scrive pertanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) (-m\omega^2 + j\omega c + k) e^{+j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

Dovendo l'eguaglianza valere per ogni ω risulta chiaro che deve risultare:

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + j\omega c + k} \quad (1.36)$$

vale a dire proprio quello che si voleva dimostrare.

Si fa osservare esplicitamente che mentre nel dominio del tempo il legame tra la risposta e l'ingresso è dato dal prodotto di convoluzione tra la risposta all'impulso elementare unitario e la forza eccitante, nel dominio della frequenza tale legame è dato semplicemente dal prodotto tra la funzione di risposta in frequenza e la trasformata di Fourier della forza eccitante.

È del tutto intuitivo che la risposta all'impulso elementare unitario deve essere legata alla funzione di risposta in frequenza visto che le due grandezze permettono di desumere la stessa quantità una volta nel dominio del tempo ed un'altra in quello della frequenza. Il legame tra la $h(t)$ e la $H(j\omega)$ è d'altronde molto semplice e passa com'è facile prevedere per la trasformata di Fourier. Per provare ciò basta scrivere la risposta del sistema all'impulso unitario: $f(t) = \delta(t)$:

$$x(t) = h(t)$$

utilizzando la definizione di antitrasformata della $x(t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega = h(t)$$

Applicando il legame tra risposta ed eccitazione per mezzo della funzione di risposta in frequenza:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot F(\omega) e^{+j\omega t} d\omega = h(t)$$

Applicando la definizione di trasformata alla $F(\omega)$ si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{+j\omega t} d\omega = h(t)$$

Poiché $\delta(t)$ è nullo per ogni valore diverso da zero e poiché $e^{-j\omega t} = 1$ per $t = 0$, l'integrale entro parentesi quadra vale 1 (si ricordi anche la terza proprietà del delta di Dirac). Pertanto è possibile scrivere la relazione tra la $h(t)$ e la $H(j\omega)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega = h(t) \quad (1.37)$$

In altri termini, la risposta all'impulso elementare unitario è l'anti-trasformata di Fourier della risposta in frequenza, e, pertanto, la risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso elementare.

6 Applicazione: le vibrazioni flessionali degli alberi

6.1 Introduzione

Si prenda in considerazione un albero sul quale è calettato un "disco" (questi "dischi" possono essere a seconda dei casi: semplici volani, pulegge per trasmissioni di cinghie o catene, ruote dentate, palettature di turbine) e lo si ponga in rotazione. Sperimentalmente si osserva che, all'aumentare del numero di giri di rotazione, ad un certo punto si osserva che le sue vibrazioni diventano sempre più ampie. In funzione dei parametri caratteristici dell'albero, la velocità cui tale fenomeno avviene cambia; tale velocità è detta *critica*. Tale fenomeno è dovuto alla risonanza tra le frequenze di vibrazioni proprie dell'albero e la frequenza delle forze di eccitazione centrifughe. Tali ultime forze sono causate da una sempre presente²⁴ *eccentricità* del baricentro delle masse rotanti calettate: in pratica il centro di massa dei dischi calettati sugli alberi non coincide con l'asse di rotazione dell'albero stesso. Ovviamente, dal punto di vista progettuale, è molto importante conoscere tale velocità critica in modo da dimensionare il sistema cosicché la velocità di funzionamento sia *inferiore* a quella critica.

6.2 Il rotante ideale

Si supponga di avere un albero verticale con un disco molto sottile calettato nella sua mezzeria come in Figura 1-17²⁵. Si ipotizzi che tutta l'elasticità flessionale del sistema sia associabile a quella dell'albero, mentre la sua massa sia trascurabile rispetto a quella del disco; i supporti, inoltre, siano assimilabili a cerniere rigide prive di massa e di capacità smorzanti (si consideri che, in generale, la rigidità dei supporti è un ordine di grandezza più grande di quella degli alberi sui quali

²⁴ Evidentemente, data la dipendenza dell'ampiezza delle forze centrifughe dal quadrato della velocità angolare di rotazione (l'ampiezza della forza centrifuga è pari a $m \cdot e \cdot \omega^2$, dove m è la massa del disco, ω la velocità angolare di funzionamento ed e l'eccentricità, vale a dire la distanza tra il baricentro del disco e l'asse di rotazione dell'albero), al fine di ridurre le sollecitazioni sull'albero e sui supporti, all'aumentare della velocità di rotazione deve necessariamente conseguire una riduzione dell'eccentricità.

²⁵ Si può dimostrare che, a parità di tutte le ipotesi poste, le frequenze proprie non sono influenzate dal fatto che l'albero sia in verticale od in orizzontale.

sono montati e che la loro massa è esigua così come l'energia dissipata). Sia, infine, e l'eccentricità del disco calettato sull'albero. Sotto queste ipotesi (*ipotesi del rotante ideale*), all'aumentare della velocità di rotazione, il sistema assumerà una configurazione tale da equilibrare sempre la forza centrifuga e quella di richiamo elastico.

Tale sistema si può studiare con la teoria del modello ad un grado di libertà ove:

- non è presente lo smorzamento.
- la forzante è del tipo: $m \cdot e \cdot \omega^2 \cos(\omega t)$
- la costante elastica vale²⁶: $k = \frac{48EI}{L^3}$,
- la massa vale m .

L'equazione del moto del rotante ideale è:

$$m\ddot{x} + kx = m \cdot e \cdot \omega^2 \cos(\omega t) \tag{1.38}$$

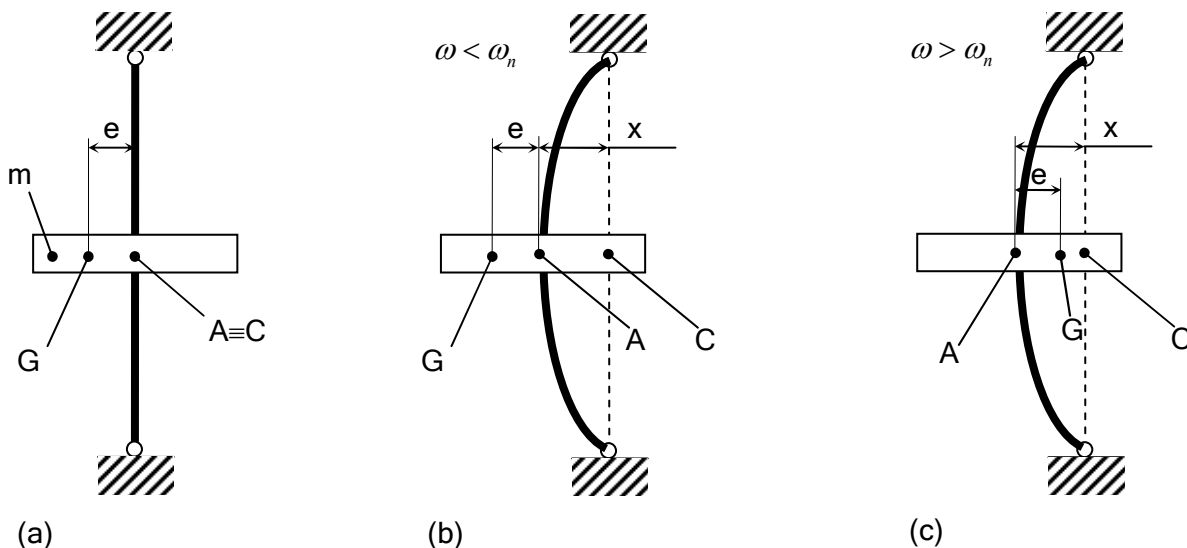


Figura 1-17. Rotante ideale nella configurazione a riposo (a), e per velocità di rotazione inferiore a quella critica (b) e superiore (c).

Essendo la soluzione del tipo: $x(t) = X \cos(\omega t)$, si ricava che²⁷: $X = \frac{e}{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1}$. Volendo ricavare

il comportamento del sistema indipendentemente dal valore dell'eccentricità, ha senso fissare

²⁶ I è il momento d'inerzia di figura dell'albero: $I = \frac{\pi D^4}{64}$, D il suo diametro, L la sua lunghezza ed E , il modulo di Young

del materiale (tipicamente, $2.06 \cdot 10^{11}$ N/m² per l'acciaio). Tale valore è valido solo se l'albero si può considerare incernierato alle estremità ed il disco calettato in mezzeria.

²⁷ Si noti che anche in questo caso è presente lo sfasamento che vale zero se $\omega < \omega_n$ e vale 180° se $\omega > \omega_n$ (senza sfasamento, infatti, in tale ultimo caso si avrebbe un'ampiezza negativa).

l'attenzione sulla quantità: $|\alpha(\omega)| = \left| \frac{X}{e} \right| = \left| \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \right|$, che costituisce l'amplificazione dinamica

del carico. Per basse velocità di rotazione, $|\alpha(\omega)|$ si mantiene contenuto ed aumenta all'aumentare della velocità di rotazione fino alla risonanza quando il suo valore non è definito. All'aumentare ulteriore della velocità di rotazione $|\alpha(\omega)|$ diminuisce fino a tendere al valore unitario (si veda la Figura 1-18). Questo comportamento costituisce il fenomeno dell'*autocentratura*: il baricentro del rotore tende a porsi sull'asse di rotazione e la deformazione elastica dell'albero tende ad eguagliare proprio il valore dell'eccentricità.

Chiaramente, qualora il numero di dischi calettati sull'albero fosse stato in numero maggiore di uno, la trattazione proposta non sarebbe stata adeguata, ma sarebbe stato necessario ricorrere alla teoria che è alla base dei sistemi discreti vibranti a più gradi di libertà.

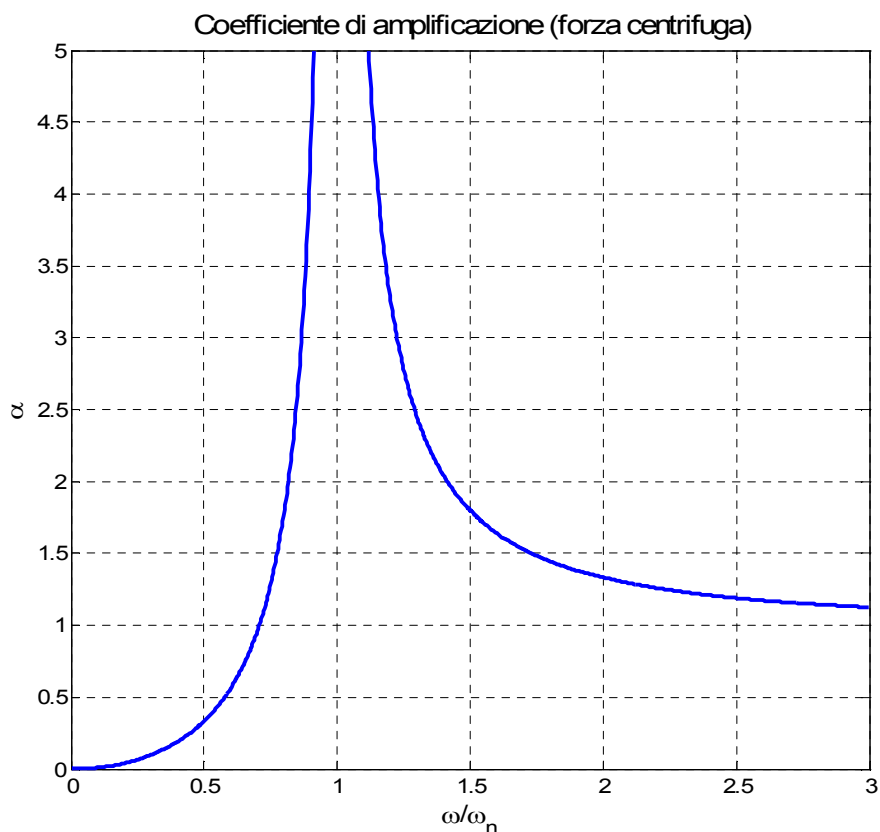


Figura 1-18. Coefficiente di amplificazione dovuto a sollecitazione centrifuga.

6.3 Alcune brevi considerazioni

Il sistema analizzato nel paragrafo precedente è certamente molto semplice e di rado ben approssima il comportamento di un sistema reale; volendo rendere il calcolo più aderente al sistema reale sarebbe innanzitutto da considerare l'effettiva cedevolezza dei vincoli e l'effettivo schema statico di riferimento. Per quanto concerne il primo aspetto, ipotizzando che la rigidità dei supporti sia iso-

tropa (vale a dire identica secondo due direzioni ortogonali, cosa non sempre vera) è possibile calcolare la rigidezza del sistema nel seguente modo:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_c} \quad (1.39)$$

definendo ora le seguenti quantità:

- $\omega_{na} = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$, pulsazione naturale del sistema quando i supporti sono rigidi (e l'albero deformabile).
- $\omega_{nc} = \sqrt{\frac{k_c}{m}}$, pulsazione naturale del sistema quando i supporti sono deformabili (e l'albero rigido).

Si vede facilmente -manipolando la (1.39)- che risulta: $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{\omega_{na}^2} + \frac{1}{\omega_{nc}^2}$, da cui:

$$\omega_n = \frac{\omega_{na} \cdot \omega_{nc}}{\sqrt{\omega_{na}^2 + \omega_{nc}^2}} = A \cdot \omega_{na},$$

essendo: $A = \frac{\omega_{nc}}{\sqrt{\omega_{na}^2 + \omega_{nc}^2}}$. A fornisce l'effettiva pulsazione naturale del sistema a partire dalla pul-

sazione naturale nell'ipotesi di supporti rigidi.

Quest'ultimo fattore è importante perché mostra l'influenza che riveste l'elasticità dei supporti nei confronti della frequenza propria del sistema. Il grafico di Figura 1-19 riporta l'andamento del fattore A al variare del rapporto tra la rigidezza dei supporti e quella dell'albero. Se i cuscinetti hanno una rigidezza almeno doppia di quella dell'albero si può dire che non si commette un grave errore nel trascurarla, vale a dire nel considerare i cuscinetti rigidi.

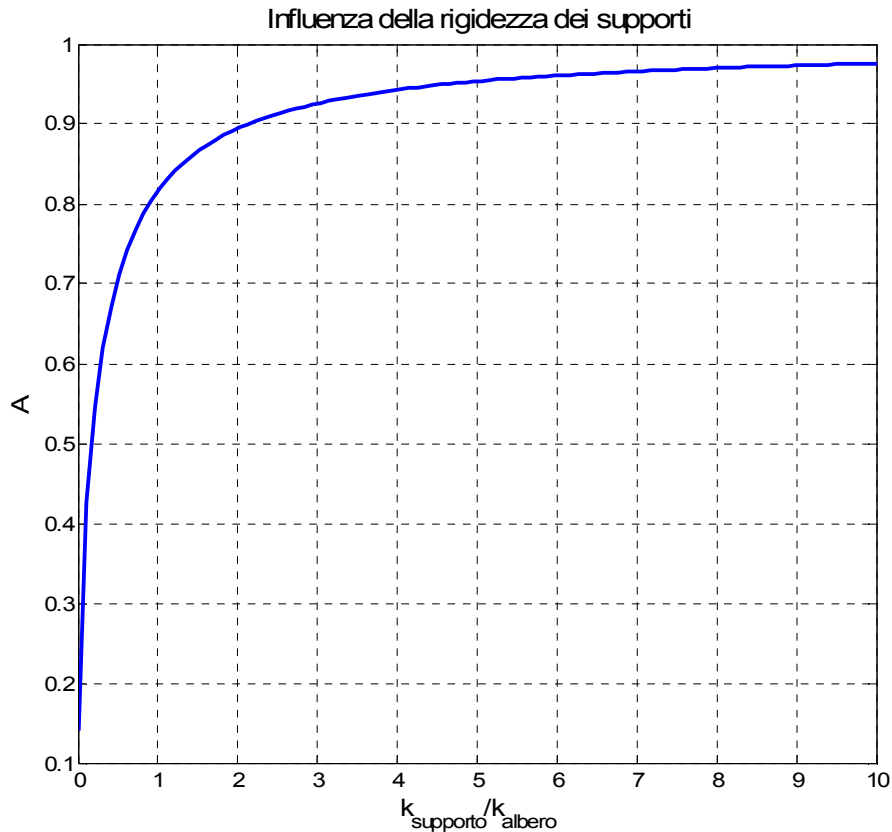


Figura 1-19. Influenza della rigidità dei supporti sulla frequenza propria.

Per quanto concerne, infine, l'effettivo schema statico di riferimento si faccia attenzione al fatto che, considerando i supporti rigidi, ad uno schema statico appoggio-appoggio è associata una rigidezza dell'albero che vale:

$k = \frac{48EI}{L^3}$, mentre per uno schema incastro-incastro, la rigidezza vale:

$k = \frac{192EI}{L^3}$. Ciò si traduce in un raddoppio della frequenza propria $\left(\sqrt{\frac{192}{48}} = 2 \right)$, che deve essere

tenuto in debita considerazione. Come indicazione di massima si può dire che i cuscinetti d'estremità possono essere considerati come appoggi, a meno che:

- la loro estensione assiale sia non trascurabile rispetto al diametro (almeno due volte)
- l'albero sia montato su tre cuscinetti, allora quello centrale si comporta da incastro
- sia presente un giunto di collegamento tra due alberi.

E' chiaro che nei diversi casi converrà procedere, in caso d'incertezza, a favore di sicurezza, ciò vuol dire che se l'obiettivo è quello di una progettazione subcritica, allora si potranno considerare i cuscinetti come delle cerniere.