Lezione 6

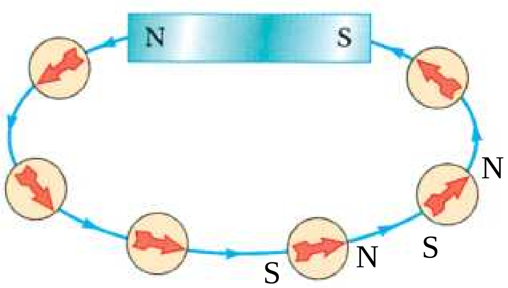
Magnetostatica: forze magnetiche e campo magnetico

Campo di induzione magnetica $\vec{B}(\vec{r})$

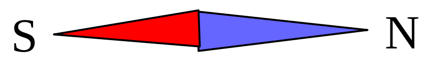
(nomenclatura "storica"; in realtà si dovrebbe chiamare, e spesso lo è, *campo magnetico*)

è un "campo di forze" vettoriale nello spazio, cioè una grandezza fisica con modulo $B \equiv |\vec{B}|$ e direzione, funzione della posizione nello spazio $\vec{r} = (x, y, z)$ (teorie di Faraday-Maxwell)

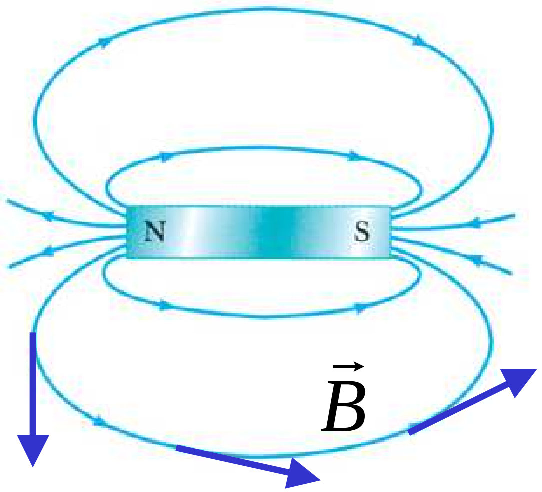
Azione del campo di induzione magnetica (ad esempio vicino a una calamita o magnete naturale): orientamento di aghi magnetici



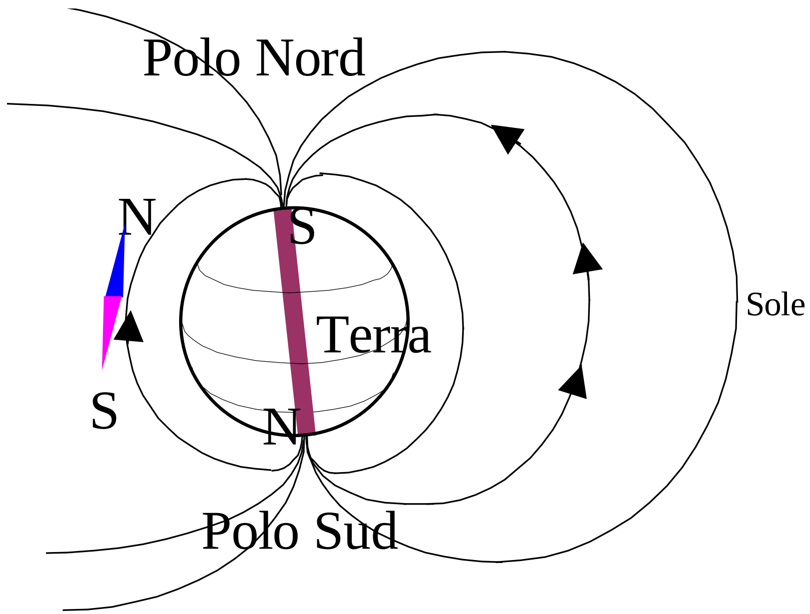
Sul magnete e sugli aghi magnetici (bussole) sono definiti i poli Nord e Sud; gli aghi si orientano secondo linee in modo da formare una catena N-S-N-S- ....
(poli opposti si attraggono, poli uguali si respingono)



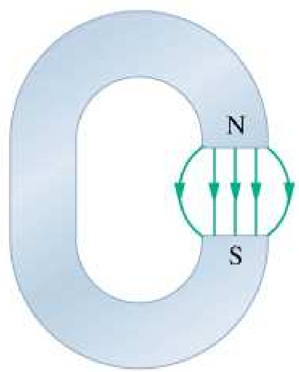
Rappresentazione del campo magnetico per mezzo di **linee di forza:** la direzione del campo è tangente alle linee, che escono dal polo N (Nord) ed entrano dal polo S (Sud)



Campo di induzione magnetica della terra



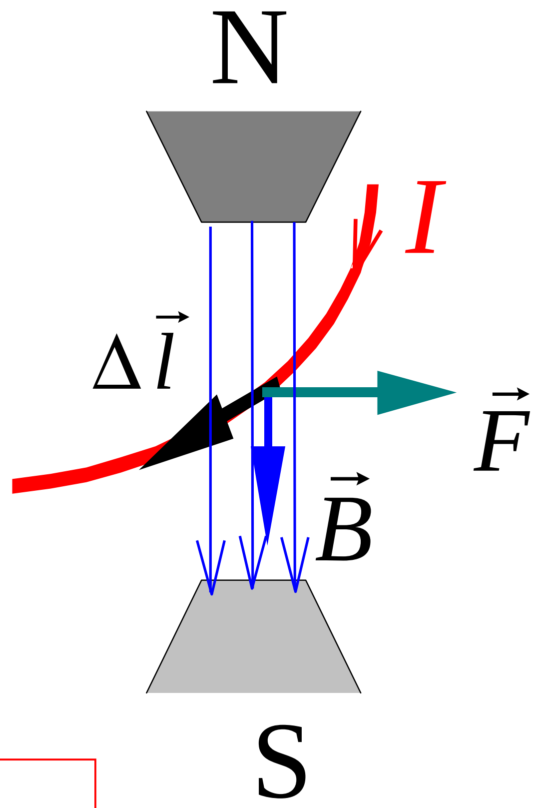
Dipolo magnetico: oggetto simile al dipolo elettrico: è formato da due poli magnetici opposti a distanza d, la struttura delle linee di forza è simile



Azione del campo di induzione magnetica: forze su fili percorsi da una corrente elettrica (*seconda legge di Laplace*)

$\vec{B}$ campo di induzione magnetica

$\Delta \vec{l}$ tratto di filo, orientato nel verso della corrente I



La forza è proporzionale alla corrente, alla lunghezza del tratto di filo e al campo, ed è **diretta perpendicolarmente** alle direzioni del filo e del campo secondo la regola del cacciavite (o della mano destra)

$$\boxed{\vec{F} = I\,\Delta\vec{l} \times \vec{B}}$$

vettore $\vec{F} = I \cdot$ **prodotto vettoriale** tra i vettori $\Delta\vec{l}$ e $\vec{B}$

Più esattamente: forza infinitesima su un tratto di filo di lunghezza infinitesima $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$

Prodotto vettoriale

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}}$$

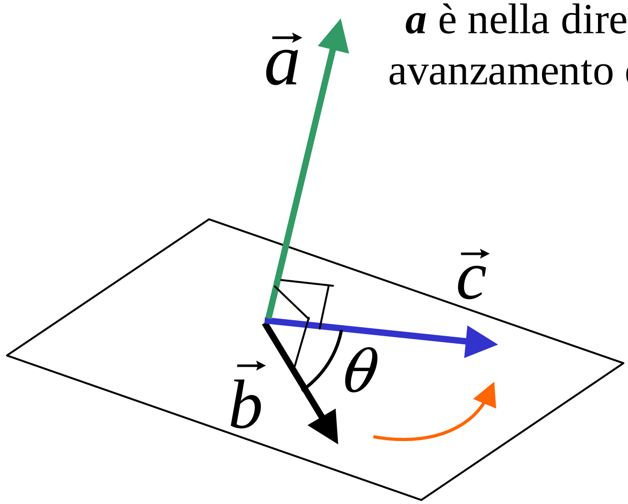
$\vec{a}$ perpend. a $\vec{b}$ e $\vec{c}$

modulo $\quad a = b\,c\ \mathrm{sen}\,\theta$

se $\vec{b} \perp \vec{c} \quad \Rightarrow a = b\,c$

se $\vec{b} \parallel \vec{c} \quad \Rightarrow a = 0$

il prodotto vettoriale non è commutativo! $\quad \vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{c}$

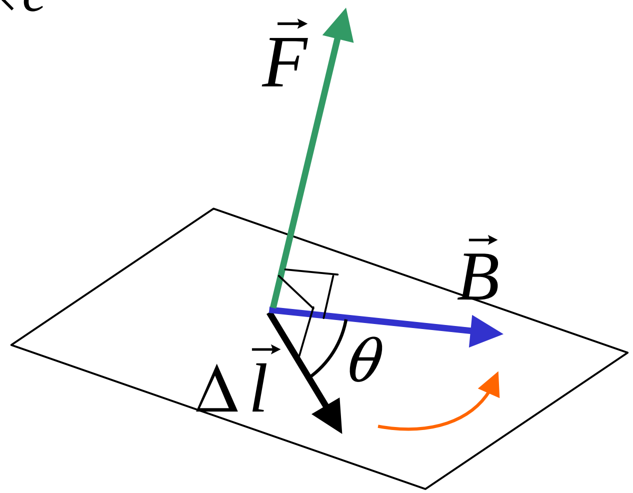


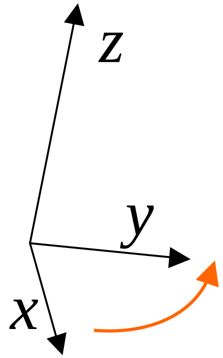
a è nella direzione di avanzamento della vite

Forza del campo B

$$\boxed{\vec{F} = I\,\Delta\vec{l} \times \vec{B}}$$

modulo $\quad F = I\,B\,\mathrm{sen}\,\theta\ \ \Delta l$





terna di assi cartesiani ortogonali (x,y,z)

La forza su fili definisce completamente B $\vec{F} = I\,\Delta\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow [F] = [I\,\Delta l\,B]$

$$\Rightarrow \quad [B] = \left[\frac{F}{I\,\Delta l}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{dimensioni di } B = \frac{\text{Forza}}{\text{Corrente} \cdot \text{Lunghezza}}$$

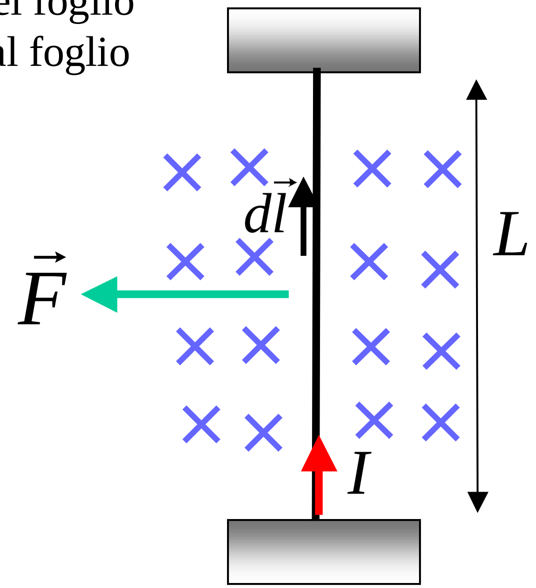
Si definisce il Tesla, unità di misura di B $\quad 1\,\text{T} = \dfrac{1\,\text{N}}{1\,\text{A} \cdot 1\,\text{m}}$

Esempi: Elettromagnete B ≈ 2 T
Ferromagnete B ≈ 0.2 T
Campo magnetico terrestre ≈ 10^{-4} T

Si usa anche il Gauss: 1 Gauss = 10^{-4} T

Forza totale su filo rettilineo in campo magnetico uniforme e perpendicolare al filo

Simbologia:
⊗ Campo entrante nel foglio
⊙ Campo uscente dal foglio

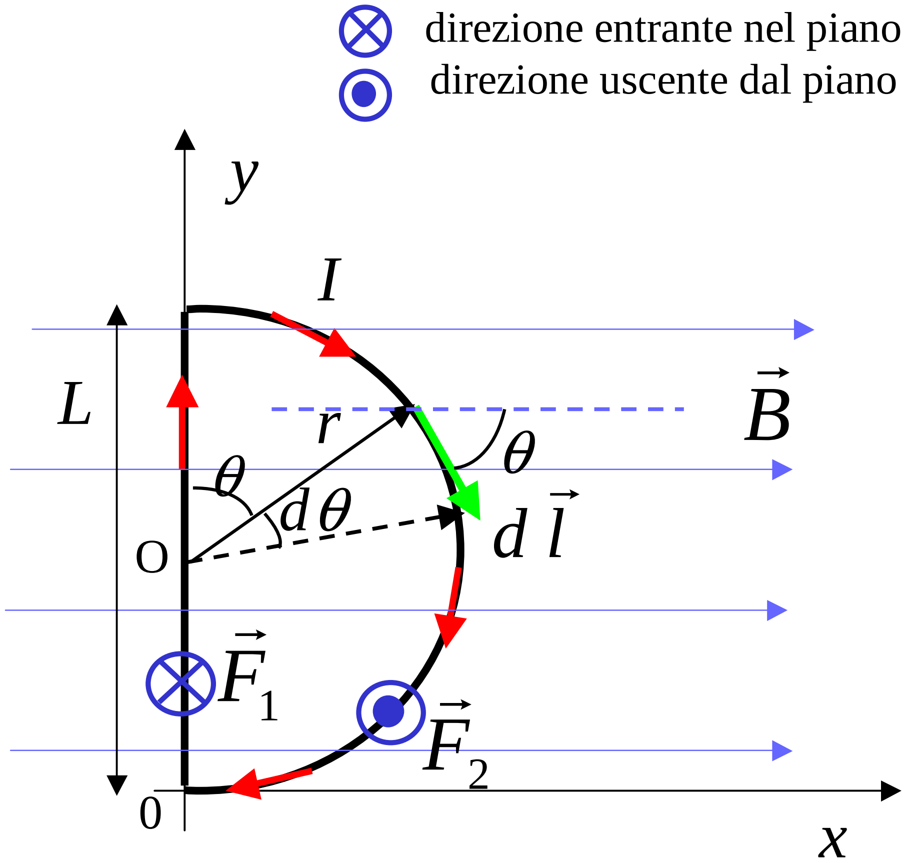


B costante, $\theta = \pi/2$, sen $\theta = 1$
F diretta verso sinistra

$$F = \int_{filo} dF = \int_{filo} I\,B \operatorname{sen}\theta \; dl = I\,B \int_{filo} dl = I\,B\,L$$

Esempio di calcolo: forza totale su un circuito semicircolare in campo magnetico uniforme (vedi figura)

$\vec{B}$ diretto come x
r raggio del semicerchio
I corrente
$d\vec{l}$ tratto di filo infinitesimo
θ angolo tra la direzione di ***dl*** e quella di *B*



Forza sul tratto rettilineo del circuito: direzione entrante nel piano

$$F_1 = I\,L\,B$$

Forza sul tratto semicircolare: direzione uscente dal piano; dato che $dl = r\,d\theta$ e che l'angolo va da 0 a π percorrendo il semicerchio (nel verso della corrente) si ha

$$F_2 = \int_{semicerchio} I\,B\,sen\theta\,dl = \int_0^{\pi} I\,B\,r\,sen\theta\,d\theta = I\,B\,r\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2\,I\,B\,r = I\,B\,L$$

uguale e opposta alla precedente. Quindi la forza totale è nulla.
(questa conclusione è valida per spire di forma qualsiasi percorse da corrente!).
Sarà possibile però un moto di rotazione (coppia di forze e momento meccanico)

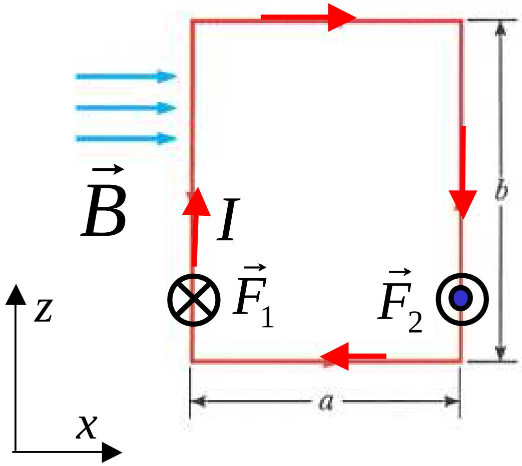
Momento meccanico su una spira

⊗ Corrente entrante nel foglio

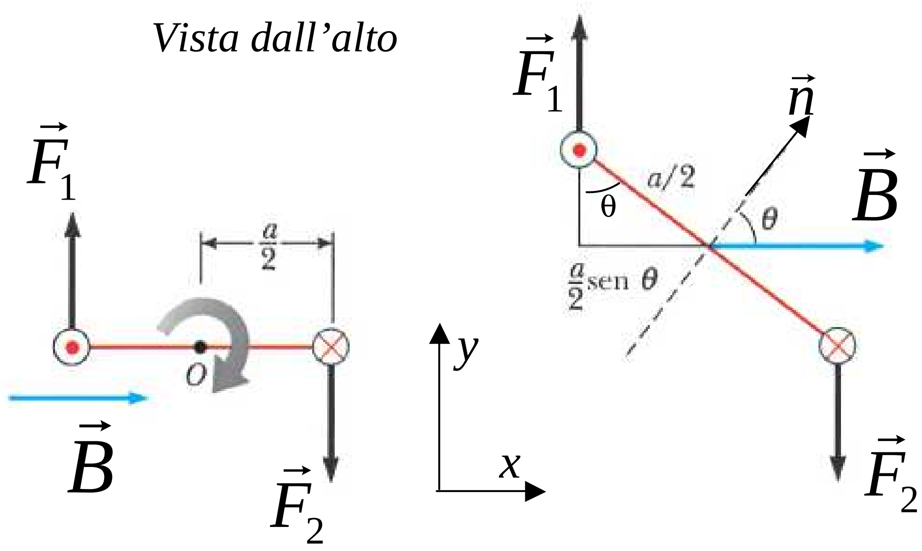
⊙ Corrente uscente dal foglio

θ Angolo tra B e la normale alla superficie della spira

Vista di fronte



Vista dall'alto



Spira rettangolare di superficie $S = a\,b$, con corrente I, immersa in campo magnetico uniforme B diretto come x

Forze sui tratti diretti come x (paralleli a B) : nulle

Forze sui tratti diretti come z (perpendicolari a B) : $F_1 = F_2 = I\,B\,b$

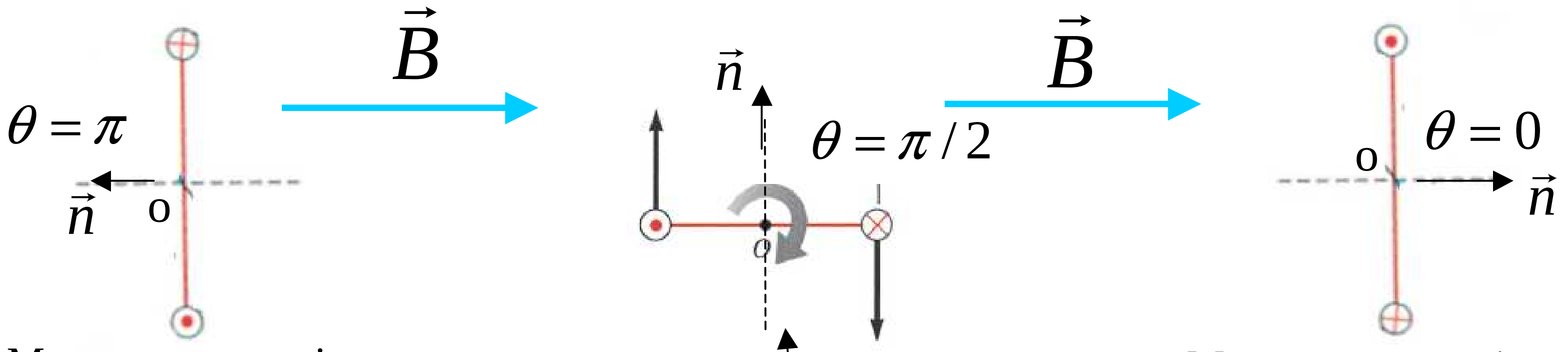
F_1 e F_2 hanno direzioni opposte $\Rightarrow$ coppia di forze moto rotatorio intorno al punto centrale O momento meccanico rispetto a O:

$$M = F_1 \frac{a}{2} \text{sen}\,\theta + F_2 \frac{a}{2} \text{sen}\,\theta = 2 \cdot IbB \frac{a}{2} \text{sen}\,\theta =$$

$$\Rightarrow \quad M = I \cdot S \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$$

Momento meccanico = corrente · superficie · campo

$$[M]=[I\cdot S\cdot B]=\mathrm{Am^2\,T}=\mathrm{Am^2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}=\mathrm{Nm}$$



Momento meccanico zero
(posizione di equilibrio instabile)
energia massima $U = + I\,S\,B$

Momento meccanico zero
(posizione di equilibrio stabile)
energia minima $U = - I\,S\,B$

Momento meccanico massimo
energia zero

$$M = I\,S\,B \qquad U = 0$$

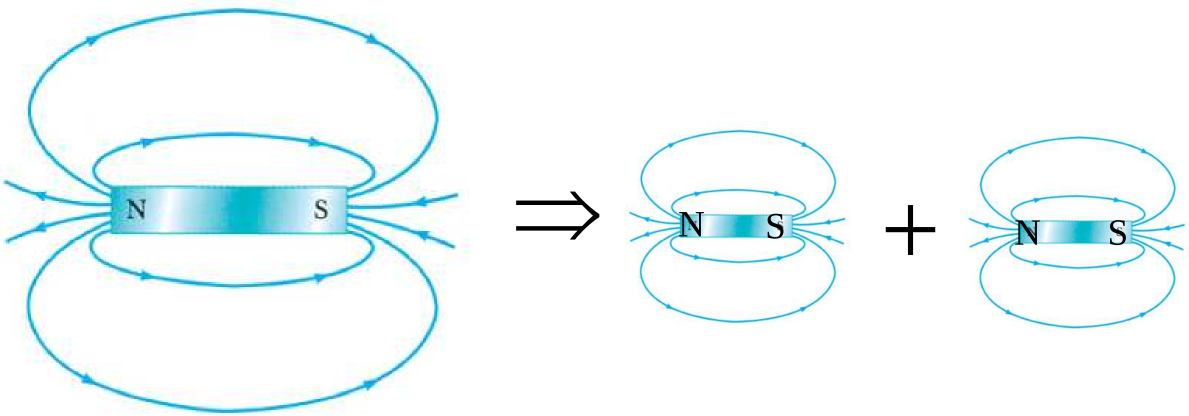
(N.B la normale ***n*** alla spira corrisponde alla regola del cacciavite ruotando secondo la rotazione della corrente)

Energia della spira nel campo magnetico: $U = -I\,S\,B\cos\theta$

(si ricava calcolando il lavoro meccanico per la rotazione della spira)

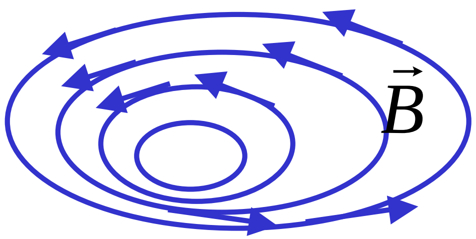
Motori elettrici: si ottiene lavoro meccanico sfruttando il movimento della spira nel campo di induzione magnetica, variando nel tempo sinusoidalmente la corrente per mantenere momento meccanico e rotazione (motori sincroni)

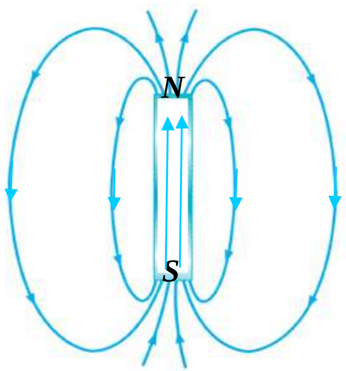
Il campo magnetico *B* viene generato da: magneti



Non è possibile isolare un polo magnetico (ad esempio dividendo il materiale in pezzi più piccoli); i poli N e S sono sempre accoppiati.

Al limite le linee di forza di *B* si richiudono su se stesse; **non esistono cariche magnetiche** (differenza col campo elettrico) Non ci sono sorgenti del campo ***B;*** si dice che il campo ***B*** è solenoidale.





Geometria del campo *B*

Legge di Gauss per *B*

$$\Phi_B = \int_{Sup.\,chiusa} \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = 0\,!$$

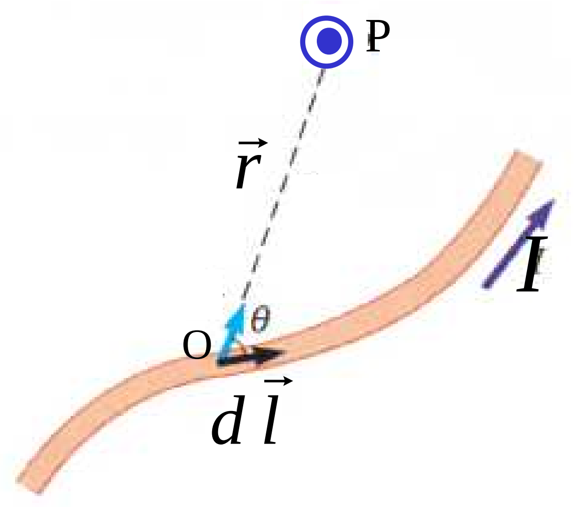
e in forma puntuale $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$

Il campo magnetico *B* viene generato da: correnti

Lezione 7

(prima osservazione sperimentale: Oersted 1819)

Il campo di induzione magnetica infinitesimo *dB* nel punto P creato dal tratto di filo infinitesimo *dl* è dato dalla legge di Biot-Savart (o *prima legge di Laplace*)



$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

in modulo: $$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} sen\theta \; d\,l$$

$d\vec{B}$
- a) è perpendicolare a ***dl*** e a ***r*** secondo la regola del prodotto vettoriale
- b) è inversamente proporzionale a r^2 (legge dell'inverso del quadrato)
- c) è proporzionale alla corrente e alla lunghezza del filo

$d\vec{l}$ tratto infinitesimo di filo, orientato nel verso della corrente *I*

$\vec{r}$ vettore posizione del punto P da O (ad angolo θ rispetto a *dl*)

in P: campo di induzione magnetica B uscente dal foglio (regola della mano destra)

Costante di proporzionalità μ_0: dipende dalla scelta di definire *B* dalla forza esercitata su fili percorsi da corrente (vedi)

Def.: permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Tm/A} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

Il rapporto tra le costanti nelle leggi che definiscono i campi, costante elettrica / costante magnetica è indipendente dalla scelta dell'unità elettrica e ha le dimensioni di una velocità al quadrato (… la luce…)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Big/ \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \left(\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}^2/\mathrm{s}^2} \right)^{-1} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = c^2$$

Il campo di induzione magnetica *B* generato da conduttori percorsi da correnti sarà quindi dato da

$$\vec{B} = \int_{fili} d\vec{B} = \int_{fili} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Si dimostra che per i campi magnetici generati da correnti vale

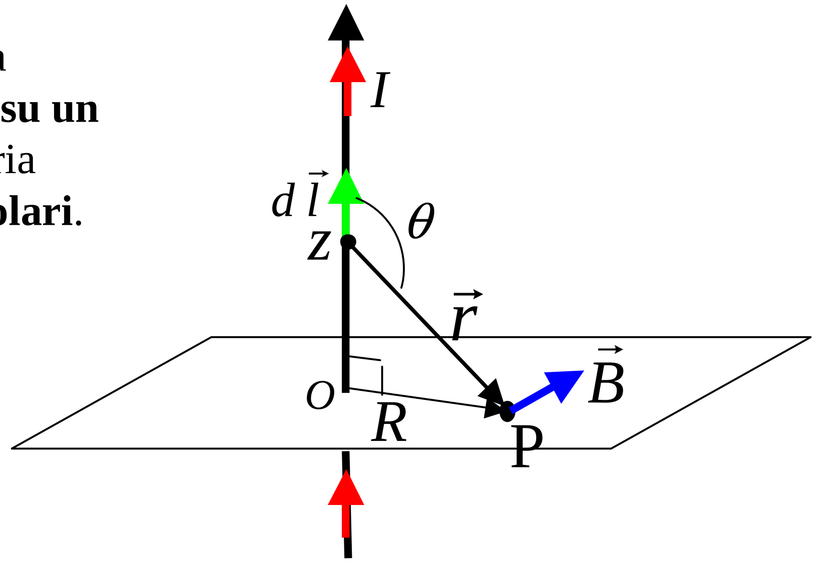
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0}$$

seconda equazione di Maxwell:
la divergenza di ***B*** è sempre zero

(a meno che non venga scoperto un monopolo magnetico ……)

campo di induzione magnetica ***B*** generato da conduttore rettilineo

Filo conduttore infinito diretto come *z* e percorso da corrente *I; B* è perpendicolare al filo e quindi giace **su un qualunque piano perpend. al filo**. Data la simmetria cilindrica, **le linee di forza del campo B sono circolari**.



Calcoliamo il campo nel punto P, a distanza R dal punto di intersezione del filo col piano

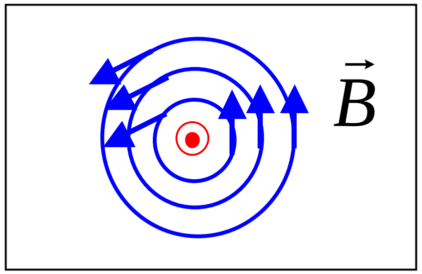
Osserviamo che: $dl = dz$

$$sen\theta = \frac{R}{r}; \qquad r^2 = z^2 + R^2$$

$$B(in\,P) = \int_{filo} dB = \int_{filo} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2} sen\theta \; d\,l =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{z}{R\sqrt{z^2+R^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

vista dall'alto: osserviamo che la direzione delle linee di forza circolari e la direzione della corrente sono legate dalla ***regola del cacciavite*** *(o mano destra)*



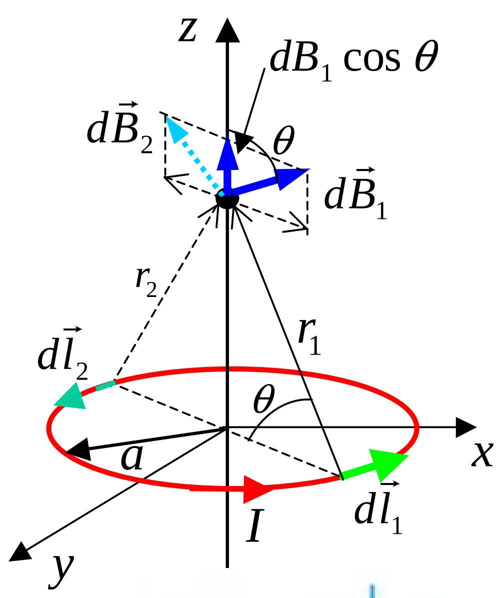
Quindi *B* è inversamente proporzionale alla distanza dal filo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

campo di induzione magnetica *B* sull'asse di una spira circolare

Spira circolare di raggio *a*, percorsa da corrente *I* e giacente sul piano *x*-*y*; sul punto indicato dell'asse, il tratto di spira dl_1 contribuisce al campo di induzione magnetica per la quantità dB_1 ; dato che dl_1 è perpendicolare al raggio vettore r_1 si ha:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\left| d\,\vec{l}_1 \times \vec{r}_1 \right|}{r_1^{\,3}} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi\, r_1^{\,2}} dl_1 = \frac{\mu_0\, I}{4\pi\left(z^2 + a^2\right)} dl_1$$

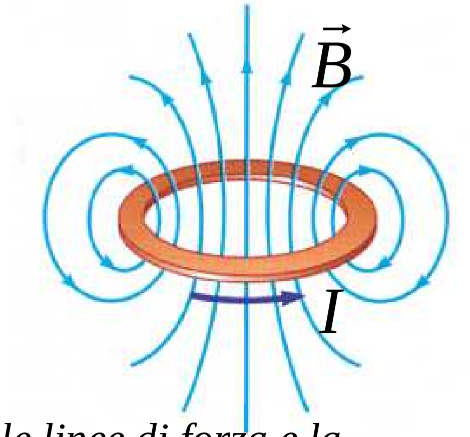


Per la simmetria circolare, il tratto di spira dl_2, opposto a dl_1, contribuisce con il campo dB_2 che ha la stessa componente su *z*, ma componente opposta sul piano *x*-*y*. Quindi la parte di campo di induzione magnetica che non si annulla è $dB_1 \cos\theta$ (con $\cos\theta = a/r_1$). **Il campo totale *B* è diretto come *z*** e vale:

$$B = \int_{spira} dB_1 \cos\theta = \int_{spira} \frac{\mu_0\, I}{4\pi\left(z^2 + a^2\right)} \cos\theta\, dl_1 =$$

$$= \frac{\mu_0\, I}{4\pi\left(z^2 + a^2\right)} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \int_{spira} dl_1 = \frac{\mu_0\, I\, a}{4\pi\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} 2\pi a$$

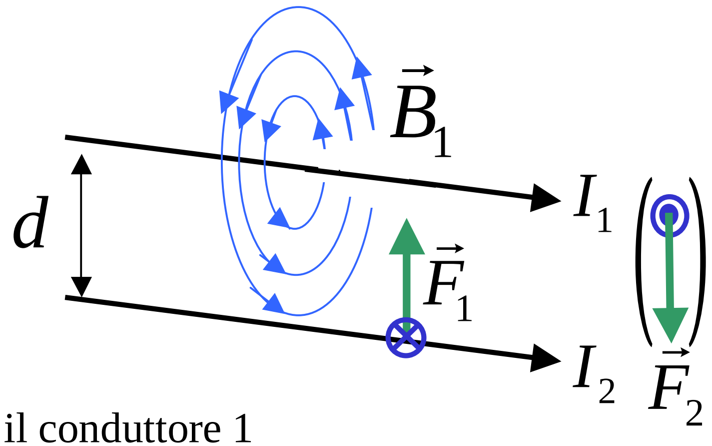
$$\boxed{B(z) = \frac{\mu_0\, I\, a^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}}}$$



*la direzione delle linee di forza e la direzione della corrente sono legate dalla **regola del cacciavite** (o mano destra)*

Forza magnetica tra conduttori paralleli

Due conduttori paralleli di lunghezza L e a distanza d con correnti I_1 *e* I_2 di verso concorde



Il conduttore 1 genera un campo $B_1(r) = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$
(diretto come linee di forza circolari)

Sul conduttore 2 agisce la forza $\vec{F}_1 = I_2 \Delta\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(d)$

di modulo $F_1 = I_2 L B_1(d) = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1 I_2}{d} L$ e direzione verso il conduttore 1

Per simmetria (come è evidente dalla formula) anche sul conduttore 1 agisce la stessa forza, diretta verso il conduttore 2 (legge di azione e reazione)

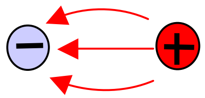
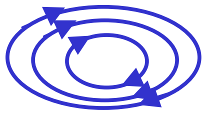
$\Rightarrow$ Due conduttori paralleli con correnti nello stesso verso <u>si attraggono</u> con una forza per unità di lunghezza : $\dfrac{F}{L} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1 I_2}{d}$

Se le correnti scorrono in versi opposti (discordi) è evidente che le forze sono in direzioni opposte

$\Rightarrow$ Due conduttori paralleli con correnti in versi opposti <u>si respingono</u> con una forza per unità di lunghezza : $\dfrac{F}{L} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1 I_2}{d}$

La definizione precisa dell'Ampere (unità di misura della corrente elettrica del Sistema Internazionale) avviene attraverso la misura di forze tra fili conduttori

Campi *E* e *B*: alcune somiglianze e differenze

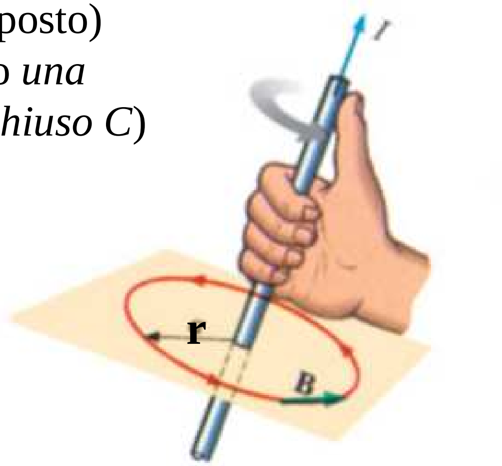
Campo elettrostatico $\vec{E}$		Campo magnetostatico $\vec{B}$
Da cariche elettriche: (dalla legge di Coulomb) $\vec{E}(\vec{r}) = k\,\frac{Q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$	$\Leftarrow$ *generazione del campo* $\Rightarrow$	Da correnti elettriche (cariche in movimento) Legge di Biot-Savart $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\,\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$
	*linee di forza*	
$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\Phi_E = \int_{Sup.\,chiusa} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{Q_{cont}}{\varepsilon_0}$ Permette di calcolare *E* per varie configurazioni di cariche	$\Leftarrow$ *geometria del campo:* $\Rightarrow$ *Legge di Gauss*	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\Phi_B = \int_{Sup.\,chiusa} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 0$ Non permette di calcolare *B* !
Campo conservativo, esiste la funzione Potenziale e	*Lavoro delle forze del campo*	Esiste funzione Potenziale ? *(No!, si vedrà più avanti)*
$\boxed{\oint_{percorso\ chiuso} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$	$\Leftarrow$ <u>*circuitazione*</u> $\Rightarrow$	$\boxed{\oint_{percorso\ chiuso} \vec{B}\cdot d\vec{s} = ??}$

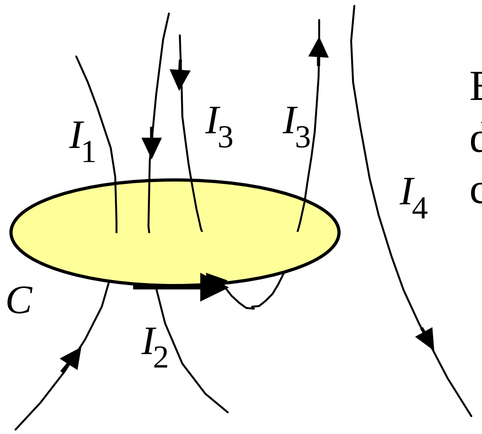
Teorema di Ampere

Dalla legge di Biot-Savart (o prima legge di Laplace) si ricava il **Teorema di Ampere:**
circuitazione di B $\Leftrightarrow$ *corrente concatenata*

$$\oint_{\substack{\text{percorso}\\ \text{chiuso}}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \, I_C$$

I_C corrente concatenata, cioè corrente totale stazionaria che passa all'interno del percorso chiuso di integrazione, presa col **segno positivo** se la direzione corrisponde alla **regola della mano destra o del cacciavite** (segno negativo nel caso opposto) (più esattamente I_C è la corrente che passa attraverso *una qualunque superficie che ha per bordo il percorso chiuso C*)



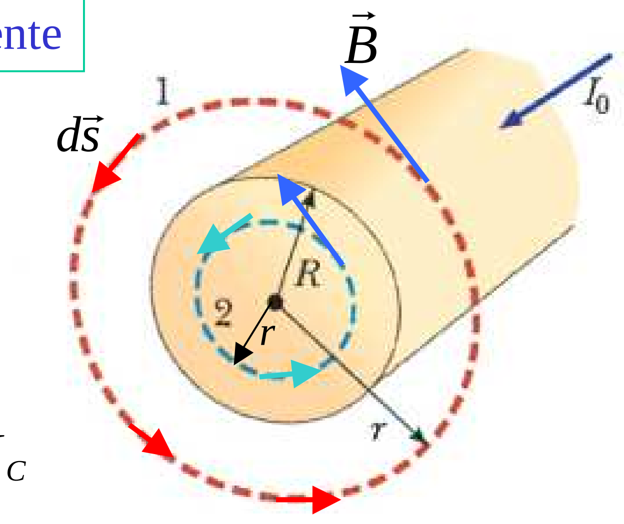


Esempio: nel sistema di fili percorsi da corrente come in figura, la corrente concatenata al circuito C vale:

$$I_C = I_1 - I_2$$

il Teorema di Ampere svolge per B le stesse funzioni della legge di Gauss per E

Campo magnetico creato da un conduttore rettilineo di raggio R, percorso da corrente I_0 distribuita uniformemente



Data la simmetria cilindrica le linee di forza di *B* sono circolari, e dirette come le frecce per la regola della mano destra (o cacciavite)

<u>Per *r* > R,</u> all'esterno del conduttore, calcoliamo il campo *B* scegliendo un percorso circolare (cerchio 1):

$$\oint_{cerchio\,1} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint_{cerchio\,1} B(r)\cdot ds = B(r)\cdot \oint_{cerchio\,1} ds = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I_C$$

corrente concatenata: $I_C = I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$ *(risultato già noto)*

<u>Per *r* < R,</u> all'interno del conduttore, calcoliamo il campo *B* scegliendo ancora un percorso circolare (cerchio 2):

$$\oint_{cerchio\,2} \vec{B}\cdot d\vec{s} = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I_C$$

la corrente concatenata è la frazione della corrente totale che passa all'interno del cerchio 2

$$I_C = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} r}$$

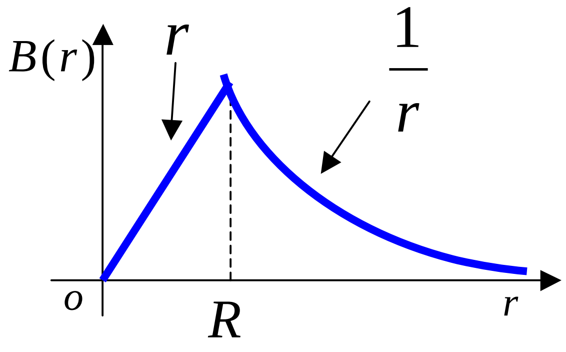
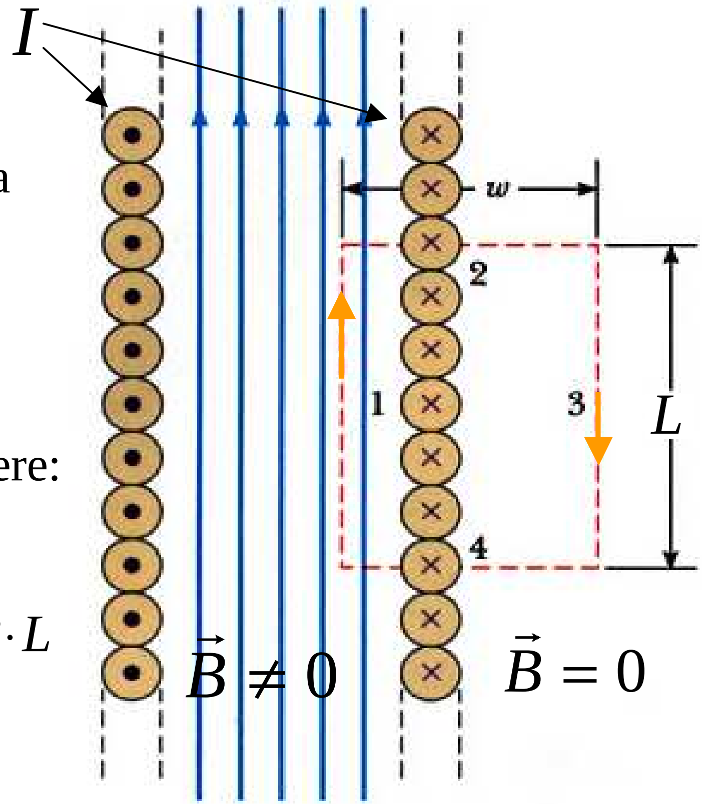


Grafico di *B(r)*

il solenoide

Il solenoide è costituito da un filo conduttore avvolto a elica e percorso dalla corrente I ; nel caso ideale di *solenoide infinito* il campo B rimane confinato all'interno, ed è quasi uniforme (*per simmetria*).



Calcolo del campo magnetico con il Teorema di Ampere: si considera il circuito rettangolare in figura

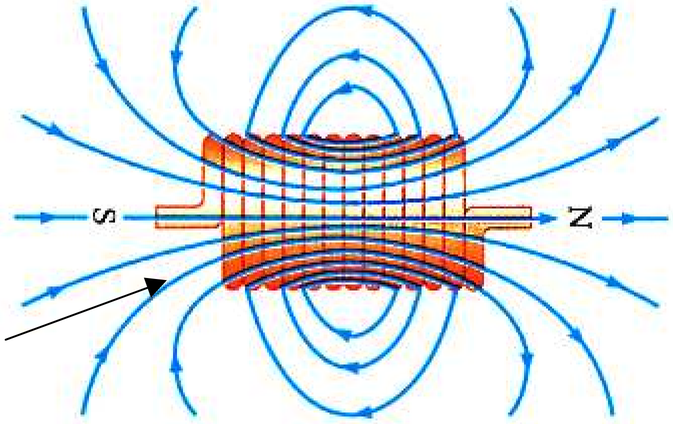
$$\oint_{circuito} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \right) \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_1 B\cdot ds + 0_{2,3,4} = B\cdot L$$

Corrente concatenata: $I_C = n \cdot L \cdot I$

(n: numero delle spire per unità di lunghezza)

$$B \cdot L = \mu_0 \; I_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \mu_0 \, n \, I}$$

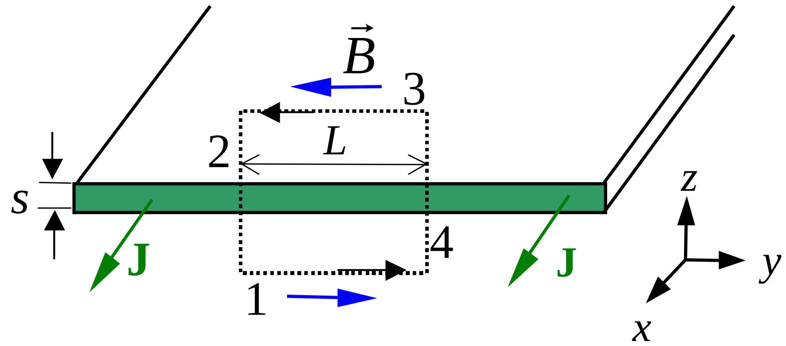
(formula valida al centro di solenoidi molto lunghi)



Linee di forza di B per un solenoide realistico

Lastra conduttrice di piccolo spessore s percorsa da densità di corrente J

Per una lastra di grande superficie, B è quasi uniforme; se la corrente scorre verso x, per la regola della mano destra le linee di forza di B sono orientate verso $+y$ in basso e $-y$ in alto.
Sul circuito rettangolare di lato L:



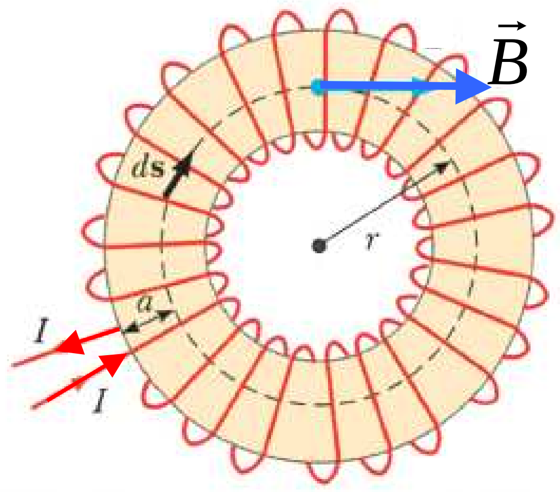
$$\oint_{circuito} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \right) \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2BL$$

Corrente concatenata: $I_C = J \cdot s\, L \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{1}{2}\mu_0\, s\, J$

$$\left(J = \frac{\text{corrente}}{\text{superficie}} \right)$$

Bobina toroidale con N spire percorse dalla corrente I

Se le spire sono molto fitte, il campo B è confinato all'interno della bobina e (per simmetria) tangente al cerchio di raggio r, centrale alle spire. Calcoliamo il campo su questo cerchio:



$$\oint_{cerchio} \vec{B}(r)\cdot d\vec{s} = B(r)\cdot 2\pi r$$

Corrente concatenata: $I_C = N \cdot I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}}$

(N.B. dipende da r, cioè non è costante all'interno della bobina)