# Geometria delle Aree

Finora ci si è occupati di determinare le sollecitazioni che agiscono su *sezioni* di elementi monodimensionali

In realtà lo studio della *Meccanica delle Strutture* non si accontenta di tale risultato in quanto vuole determinare lo *Stato di Sollecitazione* locale (i.e. in un punto materiale qualsiasi)

In tal caso infatti si può valutare le condizioni di stress di una struttura andando ad identificare se localmente si possa verificare il superamento di un limite, la cui definizione consentirebbe di confrontare ogni sezione, non solo quelle tra loro *affini*

La Geometria delle Aree in particolare consente 3 importanti passi in avanti:

- trasformare azioni interne in sollecitazioni
- valutare l’elasticità delle strutture per risolvere problemi legati all’elasticità
- fornisce gli strumenti per valutare le strutture iperstatiche

# Geometria delle Masse

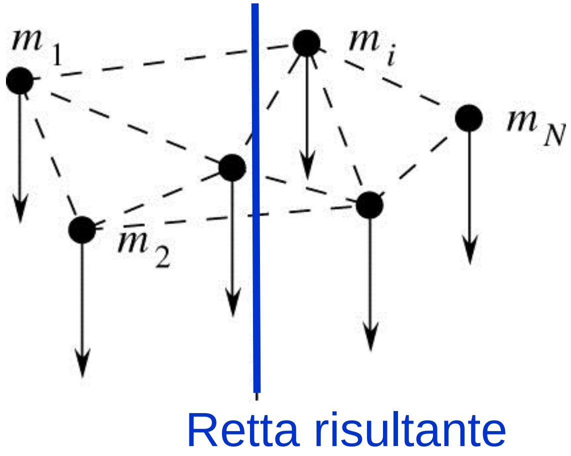
Questa considera che sui punti materiali agisce un campo di forze conservativo e costante (ad esempio gravità) – In tal caso si parla di centro di massa (o di gravità)

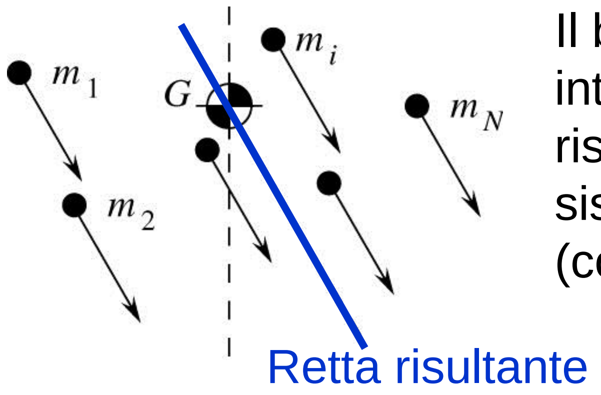
## Baricentro di una sezione

Il baricentro di un corpo (sezione) è quel punto al quale si può concentrare una forza in grado di contrastare tutte le forze agenti in ognuno dei punti che descrivono il corpo (sezione)

Ha senso quindi parlare di baricentro di un corpo nello spazio, di una sezione, di un elemento monodimensionale

**Prima di passare all'analisi di corpi estesi, conviene riferirsi a sistemi di punti**



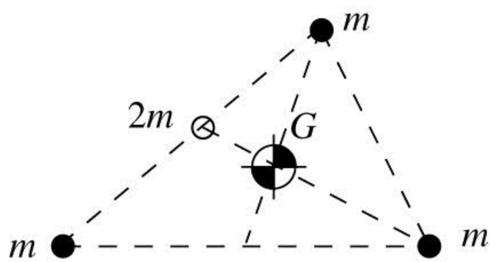




Il baricentro è il punto di intersezione della retta risultante per qualunque sistema di forze (costanti) applicato

Introdotto un sistema di riferimento cartesiano, il centro di massa risulta dal calcolo della risultante delle forze – Somma pesata delle coordinate di ciascun punto (il peso è la massa associata)

$$x_G = \frac{\sum_i x_i m_i \cancel{g}}{m\cancel{g}} \qquad y_G = \frac{\sum_i y_i m_i \cancel{g}}{m\cancel{g}} \qquad z_G = \frac{\sum_i z_i m_i \cancel{g}}{m\cancel{g}}$$

**Se le masse associate ad ogni punto sono identiche, il baricentro diviene una sola proprietà geometrica**




$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \qquad z_3 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Notare che in questo caso il baricentro coincide anche con il baricentro del triangolo (incrocio mediane)

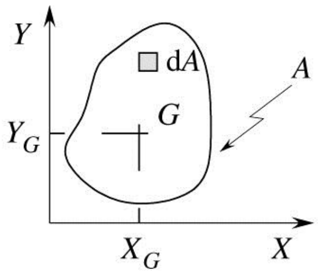
**Se si considera i corpi continui come insieme di infiniti punti materiali, le sommatorie si trasformano in integrali**

$$x_G = \frac{\iiint_V \rho x \, dV}{m} \qquad y_G = \frac{\iiint_V \rho y \, dV}{m} \qquad z_G = \frac{\iiint_V \rho z \, dV}{m}$$

Nel caso di copri omogenei ($\rho$ = cost)

$$x_G = \frac{\iiint_V x \, dV}{V} \qquad y_G = \frac{\iiint_V y \, dV}{V} \qquad z_G = \frac{\iiint_V z \, dV}{V}$$

## Per una sezione piana, infine




$$x_G = \frac{\iint_A x\, dA}{A} \qquad y_G = \frac{\iint_A y\, dA}{A} \qquad z_G = \frac{\iint_A z\, dA}{A}$$

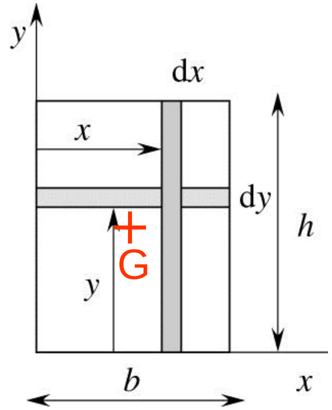
**Momenti statici di sezioni [L³]** $S_x = \iint_A y\, dA \qquad S_y = \iint_A x\, dA$

Confrontando con le precedenti, si evince che

$$\boxed{x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}}$$

Se ne deduce che se il sistema di riferimento ha per origine G (0,0), i momenti statici sono nulli qualunque sia l'orientazione degli assi

**Esempio 1: rettangolo**



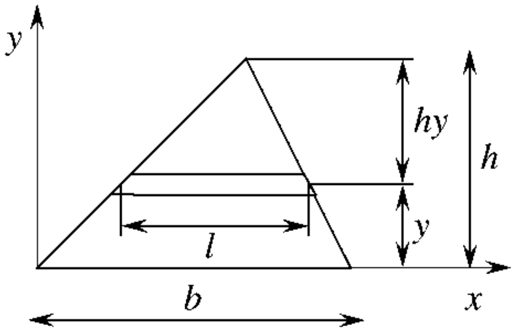

$$S_x = \iint_A y\, dA = \int_0^h by\, dy = \frac{1}{2} bh^2$$

$$S_y = \iint_A x\, dA = \int_0^b hx\, dx = \frac{1}{2} hb^2$$

Il baricentro:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{2} h \\ y_G = \dfrac{1}{2} b \end{cases}$$

**Esempio 2: triangolo** *Riferimento appoggiato sulla base b*




Dal teorema di Talete: $l(y) = b\dfrac{h-y}{h}$

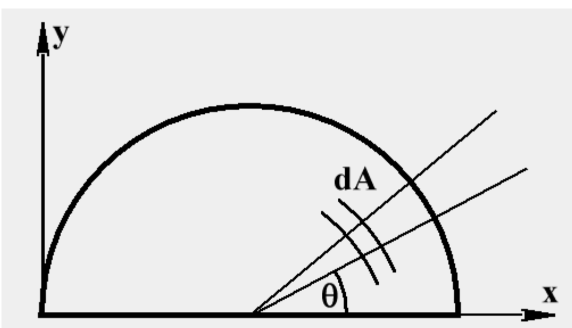
$$S_x = \iint_A y\, dA = \int_0^h y\, b\frac{h-y}{h}\, dy = \cdots = \frac{1}{6} bh^2$$

L'ordinata del baricentro: $y_G = \dfrac{1}{3} h$

---

**Esempio 3: semicerchio**

$$dA(r,\theta) = r\, d\theta\, dr$$



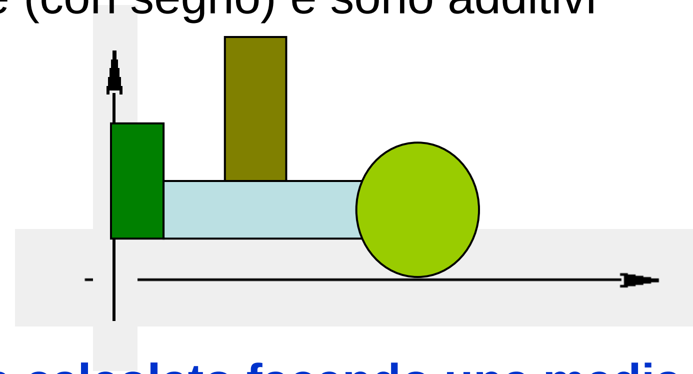

$$S_x = \iint_A y\, dA = \int_0^R \int_0^\pi r \sin(\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

$$S_x = \left[-\cos(\theta)\right]_0^\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} R^3$$

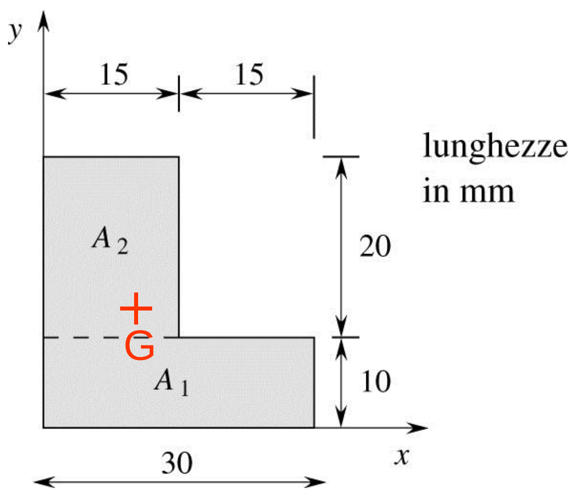
L'ordinata del baricentro: $y_G = \dfrac{S_x}{A} = \dfrac{2/3 R^3}{1/2 \pi R^2} = \dfrac{1}{3} R$

I momenti statici sono grandezze algebriche (con segno) e sono additivi

**Una figura complessa può essere calcolata suddividendola in elementari**



**In particolare il baricentro può essere calcolato facendo una media delle coordinate di ciascun baricentro - pesata dalle aree stesse**




**Oppure sommando i momenti statici e dividendo per l'area risultante**

Area 1
$$\begin{cases} S_{1x} = (30 \cdot 10) \cdot 5 = 1500\ mm^3 \\ S_{1y} = (30 \cdot 10) \cdot 15 = 4500\ mm^3 \end{cases}$$

Area 2
$$\begin{cases} S_{2x} = (15 \cdot 20) \cdot 20 = 6000\ mm^3 \\ S_{2y} = (15 \cdot 20) \cdot 7.5 = 2250\ mm^3 \end{cases}$$

$$x_G = \frac{4500 + 2250}{(300 + 300)} = 11.25\ mm$$

$$y_G = \frac{1500 + 6000}{(300 + 300)} = 12.50\ mm$$

## Momenti d'inerzia di sezioni [$L^4$]

Questi ultimi non sono altro che momenti statici del II ordine

$$J_x = \iint_A y^2 \, dA \qquad J_y = \iint_A x^2 \, dA$$

**I momenti d'inerzia sono sempre positivi**

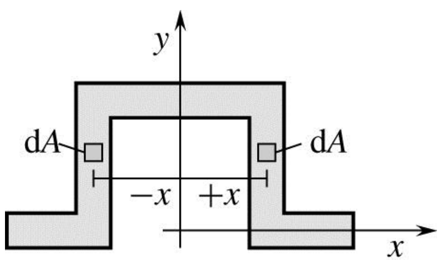
**Anche i momenti di inerzia godono dell'additività**

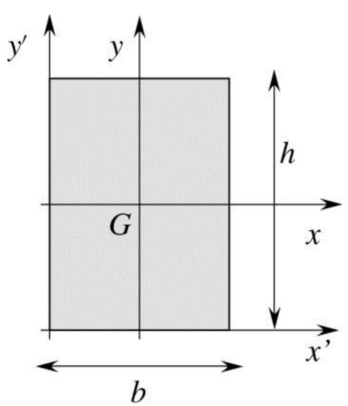
Si può anche definire un momento del II ordine misto (x-y) $\Rightarrow$ mom. centrifugo

$$J_{xy} = \iint_A xy \, dA$$

**Il momento centrifugo misto ha segno**

**Può anche essere nullo (ad esempio se anche uno solo degli assi cartesiani è asse di simmetria)**



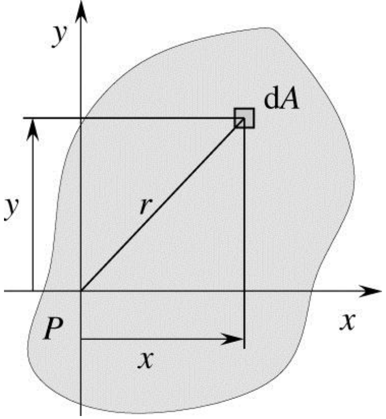




$$J_x = \iint_A y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 (b dy) = \cdots = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$J_y = \iint_A x^2 \, dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 (h dx) = \cdots = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$J_{xy} = \iint_A xy \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \int_{-b/2}^{b/2} x dx \right) y dy = 0$$

## Momenti d'inerzia polare [$L^4$]




È un momento del II ordine calcolato utilizzando un sistema di coordinate polari

$$J_p = \iint_A r^2 \, dA$$

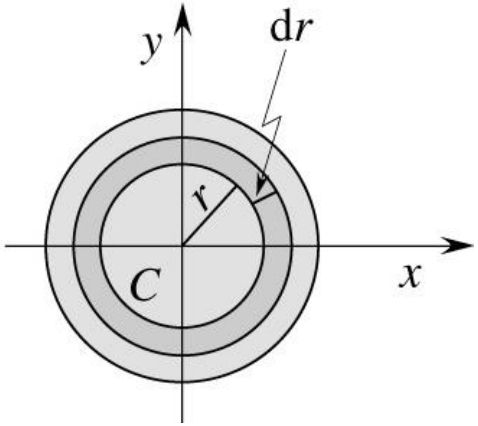
**Si calcolare noti i momenti d'inerzia utilizzando la semplice relazione**

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad J_p = J_x + J_y$$

Per una sezione rettangolare, ad esempio: $J_p = \frac{1}{12} bh\left(b^2 + h^2\right)$

---

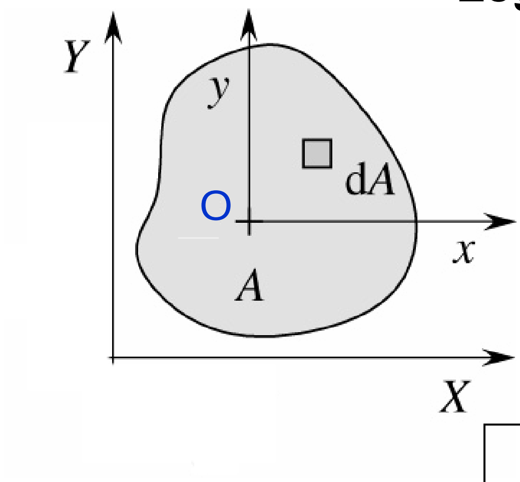
**Per una sezione circolare è più agevole calcolare $J_p$ e poi desumere $J_x$ e $J_y$**




$$J_p = \int_0^R r^2 \left(2\pi r dr\right) = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4$$

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{64} D^4$$

# Leggi per il trasporto dei momenti d'inerzia




Su un nuovo SdR ($XY$) spostato di O di coordinate $X_O\ Y_O$:

$$X = x + X_O$$

$$Y = y + Y_O$$

$$J_X = \iint_A (y + Y_O)^2\, dA = \iint_A y^2 dA + Y_O^2 \iint_A dA + 2Y_O \iint_A y dA$$

$$\boxed{J_X = J_x + 2Y_O S_x + Y_O^2 A \qquad J_Y = J_y + 2X_O S_y + X_O^2 A}$$

Momento centrifugo:

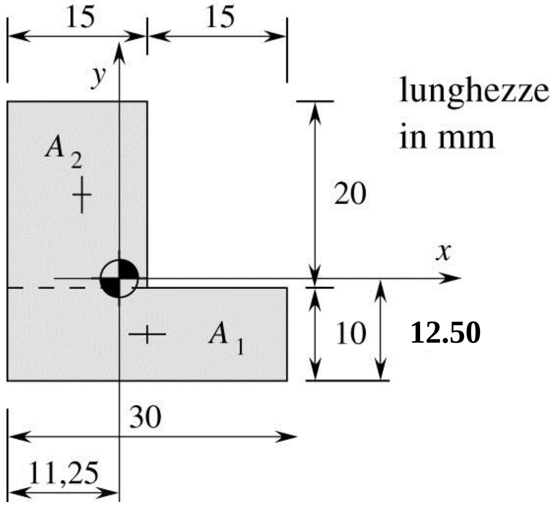
$$J_{XY} = \iint_A (x + X_O)(y + Y_O)\, dA = J_{xy} + X_O S_y + Y_O S_x + X_O Y_O A$$

**Se il riferimento xy ha per origine il baricentro (O ≅ G), le trasformazioni sono:**

**Trasformazioni di Huygens**

$$\boxed{\begin{aligned} J_X &= J_{x_g} + Y_G^2 A \\ J_Y &= J_{y_g} + X_G^2 A \\ J_{XY} &= J_{xy_g} + X_G Y_G A \end{aligned}}$$

L'utilità di queste trasformazioni è notevole, in quanto il calcolo dei momenti di inerzia si semplifica molto suddividendo la sezione in parti elementari, ciascuna delle quali viene sommata dopo averla riportata al baricentro dell'intera struttura




$$J_{1x} = \frac{1}{12}\left(30 \cdot 10^3\right) + \left(-12.5 + 5\right)^2 \cdot 300 = 19375\ mm^4$$

$$J_{2x} = \frac{1}{12}\left(15 \cdot 20^3\right) + \left(10 + 10 - 12.5\right)^2 \cdot 300 = 26875\ mm^4$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = 46250\ mm^2$$

$$J_{1y} = \frac{1}{12}\left(10 \cdot 30^3\right) + \left(15 - 11.25\right)^2 \cdot 300 = 26718\ mm^4$$

$$J_{2y} = \frac{1}{12}\left(20 \cdot 15^3\right) + \left(-11.25 + 7.5\right)^2 \cdot 300 = 9843\ mm^4$$

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} = 36561\ mm^2$$

$$J_{1xy} = 0 + \left(15 - 11.25\right)\left(-12.5 + 5\right) \cdot 300 = -8437\ mm^4$$

$$J_{2xy} = 0 + \left(-11.25 + 7.5\right)\left(20 - 12.5\right) \cdot 300 = -8437\ mm^4$$

$$J_{xy} = J_{xy1} + J_{xy2} = -16875\ mm^2$$

**N.B. $J_{xy}$ risulta negativo perché la figura si sviluppa soprattutto nel II e IV quadrante (ove xy è negativo)**

## Raggi di inerzia (o raggi giratori)

Si tratta della lunghezza che soddisfa le seguenti relazioni:

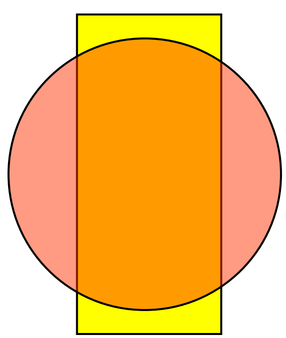
$$J_x = r_x^2 A \Rightarrow r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \qquad J_y = r_y^2 A \Rightarrow r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \qquad J_p = r_p^2 A \Rightarrow r_p = \sqrt{\frac{J_p}{A}}$$

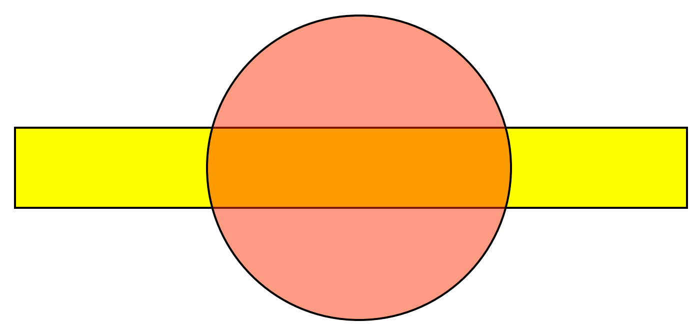
Anche qui vale la $r_p^2 = r_x^2 + r_y^2$

**Si noti che il raggio di girazione di un cerchio non coincide con il suo raggio, ma ad esso ridotto di un fattore** $\sqrt{2}$

$$r_{giraz-p} = \sqrt{\frac{\pi R^4 / 2}{\pi R^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

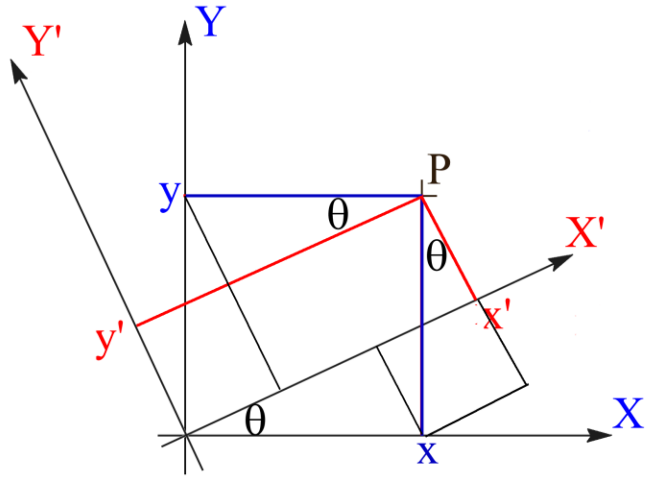
**Quindi il raggio di girazione di una sezione rappresenta, se moltiplicato per $\sqrt{2}$, il raggio di una sezione circolare che presenta il medesimo momento di inerzia (diam. o pol.)**





## Momenti di inerzia Principali

Il concetto viene introdotto quando si prova a ruotare il sistema di riferimento senza modificare le coordinate dell'origine, nel baricentro: solo orientamento




Dopo una rotazione $\theta$, le nuove coordinate sono

$$\begin{cases} x' = \quad x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Riscrivendo con tali condizioni i momenti di inerzia

$$J_{x'} = \iint_A (y')^2 dA = J_x \cos^2\theta + J_y \sin^2\theta - 2J_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$J_{y'} = \iint_A (x')^2 dA = J_x \sin^2\theta + J_y \cos^2\theta + 2J_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$J_{xy'} = \iint_A (x'y') dA = \left(J_x - J_y\right)\sin\theta\cos\theta + J_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

**Ricordando le formule:**

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{cases}$$

**E aggiungendo e togliendo uguali quantità per raggrupparle**

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\theta - J_{xy} \sin 2\theta$$

$$J_{y'} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\theta + J_{xy} \sin 2\theta$$

$$J_{xy'} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\theta + J_{xy} \cos 2\theta$$

I valori dipendono dalla rotazione del sistema di riferimento. Per particolari direzioni si può avere che il momento centrifugo si annulla

**Tali direzioni vengono dette Principali, e i momenti di inerzia $J_x$ e $J_y$ momenti principali di inerzia**

$$J_{xy'} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\theta + J_{xy} \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\theta = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$$

Nel caso della sezione ad L in precedenza calcolata:

$$\theta = \frac{1}{2} arc \tan \frac{2 \cdot (-16875)}{(36561 - 46250)} = 37°$$