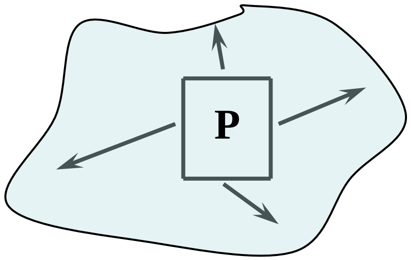
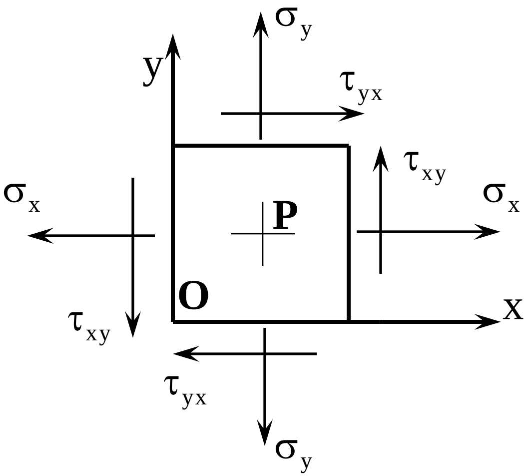
Stati di tensione

Se si opera un taglio su di un corpo qualunque soggetto ad un sistema di sollecitazioni esterne, sappiamo già che i due elementi separati si scambiano azioni interne – in forma di forze e momenti risultanti

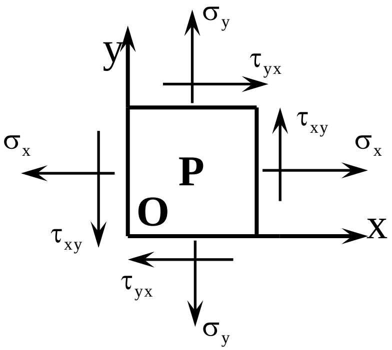
Se applichiamo questo concetto ad un cubetto elementare inserito in un medium soggetto a carichi, vediamo comparire, su ciascuna delle facce, dei vettori di sforzo, complessivamente equilibrati



Associando un sistema di riferimento e scomponendo secondo di esso i vettori di forze per ogni faccia



- ➢ si determinano i tensori applicati al punto materiale P
- ➢ questi sono valutati in termini di forze / unità area = Pressioni (Pa)
- ➢ Le σ sono le tensioni ortogonali alla faccia, positive se ingenerano tensione (e non compressione)
- ➢ Le τ sono parallele alla faccia, dirette come l'altro asse di riferimento se le corrispondenti σ sono dirette come l'asse della normale uscente



Considerazioni sull'equilibrio dei momenti al I ordine inducono a ritenere che risulti

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Pertanto i valori indipendenti sono solo 3 (nel piano)
In genere i valori sono ordinati mediante le matrici

Caso 2 D (3 valori indipendenti)

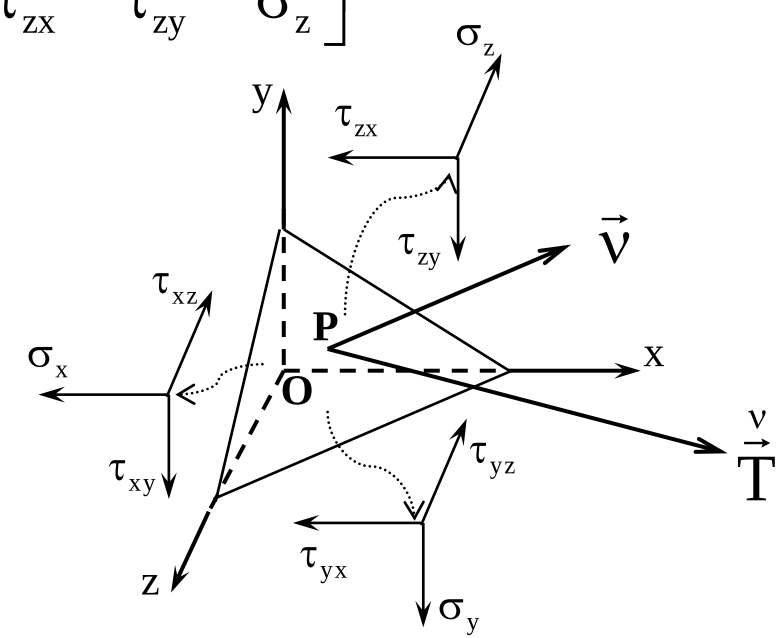
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Caso 3 D (6 valori indipendenti)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{x}} & \tau_{\mathrm{xy}} & \tau_{\mathrm{xz}} \\ \tau_{\mathrm{yx}} & \sigma_{\mathrm{y}} & \tau_{\mathrm{yz}} \\ \tau_{\mathrm{zx}} & \tau_{\mathrm{zy}} & \sigma_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

Se tagliamo il cubetto mediante un piano orientato dalla sua normale $\vec{\nu}$

Si ottiene, sulla faccia di taglio, una forza risultante $\vec{T}^{\nu}$



Questa può essere scomposta secondo il sistema di riferimento già adottato, tenendo conto della giacitura $\vec{\nu}$:

$$\vec{\nu} \equiv \left(\nu_x \vec{i} + \nu_y \vec{j} + \nu_z \vec{k} \right)$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione in x,y,z si ottiene:

Equilibrio rispetto asse x: $\overset{\nu}{T}_x \, dS + F_x \, dS \frac{h}{3} - \sigma_x \, dS_x - \tau_{yx} \, dS_y - \tau_{zx} \, dS_z = 0$

Ricordando che: $\begin{cases} dS_x = dS \, \nu_x \\ \quad \ldots \end{cases}$ e che h = OP = infinitesimo

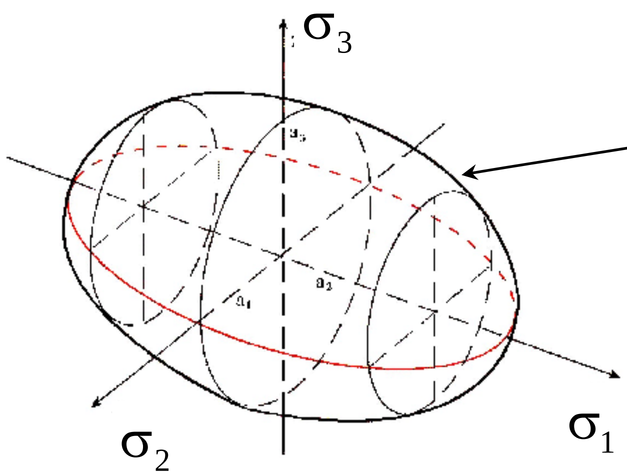
(… idem per y e per z ...)

$$\begin{cases} \overset{\nu}{T}_x = \sigma_x \, \nu_x + \tau_{yx} \, \nu_y + \tau_{zx} \, \nu_z \\ \overset{\nu}{T}_y = \tau_{xy} \, \nu_x + \sigma_y \, \nu_y + \tau_{zy} \, \nu_z \\ \overset{\nu}{T}_z = \tau_{xz} \, \nu_x + \tau_{yz} \, \nu_y + \sigma_z \, \nu_z \end{cases}$$

Relazioni di Cauchy

Con la notazione compatta e <u>indice ripetuto</u>:

$$\boxed{\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ji} \, \nu_j \qquad \text{con } i = 1 \ldots 3}$$



Luogo dei punti che racchiude la punta di $\overset{\nu}{\vec{T}}$ per ogni giacitura

ELLISSOIDE DI LAME'

(La giacitura è la normale alla superficie)

☆ Gli assi dell'ellissoide forniscono le direzioni principali

☆ Nelle direzioni principali $\tau_{ij} = 0$

Le tensioni principali sono importanti per i seguenti motivi:

- consentono di descrivere la matrice mediante l'utilizzo di soli 3 valori (tutte **τ = 0**)
- Danno una immediata cognizione del tipo di stato di tensione presente
- Consentono di applicare con facilità i criteri di rottura (criteri di equivalenza che consentono di confrontare stati di tensione non in scala)

Le tensioni principali sono sempre ordinate algebricamente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Se sono tutte positive lo stato di tensione risultante è chiaramente di trazione (espansione) Viceversa si ha compressione.

Nei casi misti è opportuno riferirsi al valore medio che prende il nome di **sforzo idrostatico**

$$\boxed{\sigma_{idr} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}}$$

Si ribadisce il concetto che lo stato di sforzo è una caratteristica fisica del sistema, e quindi non dipendente dal sistema di riferimento adottato – pertanto cambiando l'orientazione degli assi di riferimento si muterà la matrice del tensore delle tensioni – anche se rappresenterà sempre la stessa condizione fisica

È necessario stabilire quando due tensori rappresentano la stessa sollecitazione fisica

INVARIANTI DEL TENSORE

$$
\begin{cases}
\Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
\Theta_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \\
\Theta_3 = \mathrm{Det}\,\|\sigma\|
\end{cases}
$$

Minore complementare diagonale principale

Gli invarianti non mutano quando si calcola il tensore delle tensioni in altro sistema di riferimento

Pertanto si può affermare che due stati di tensione sono equivalenti se i tre invarianti sono uguali

---

Per mutare sistema di riferimento, basta utilizzare la matrice **T** dei coseni direttori tra gli assi del vecchio e nuovo sistema di riferimento e operare la trasformazione di base matriciale

$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}
$$

Esempio:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -5 & 60 \\ -5 & 55 & 32 \\ 60 & 32 & 90 \end{bmatrix} \qquad [MPa]$$

Si calcolano i 3 invarianti:

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -12 + 55 + 90 = \qquad 133 \\ \Theta_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = 3030 - 4890 - 685 = \qquad -2545 \\ \Theta_3 = Det\ \|\sigma\| = \qquad -266562 \end{cases}$$

Si vuole ora calcolare il nuovo tensore di tensione se si ha una rotazione nel piano x-y, con un angolo θ = 25°.

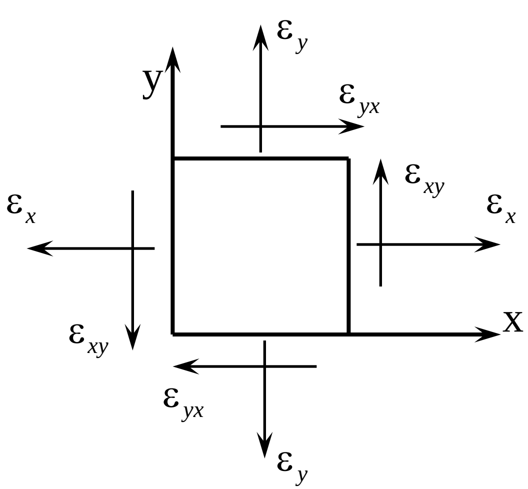
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(25) & \sin(25) & 0 \\ -\sin(25) & \cos(25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

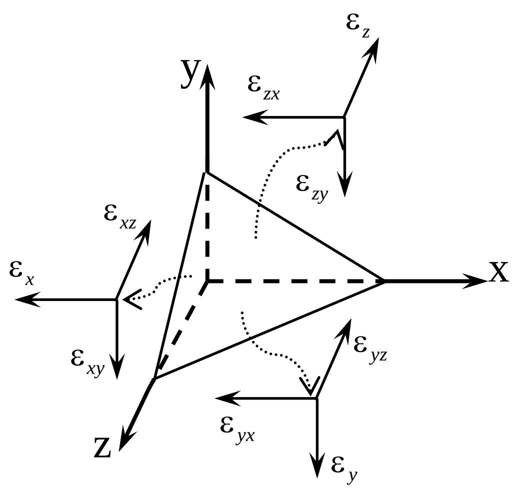
$$\begin{bmatrix} \cos(25) & -\sin(25) & 0 \\ \sin(25) & \cos(25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -5 & 60 \\ -5 & 55 & 32 \\ 60 & 32 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(25) & \sin(25) & 0 \\ -\sin(25) & \cos(25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.7968 & -28.8764 & 40.8547 \\ -28.8764 & 39.2032 & 54.3589 \\ 40.8547 & 54.3589 & 90.0000 \end{bmatrix}$$

Gli invarianti risultano: $\Theta_1 = 3.7968 + 39.2032 + 90 = 133 \qquad \Theta_2 = -2545 \qquad \Theta_3 = -266562$

Tensore di deformazione (adimensionale)

In modo analogo al tensore della tensione si definisce un *tensore di deformazione* che definisce il modo in cui si deforma un corpo attorno ad un suo punto P

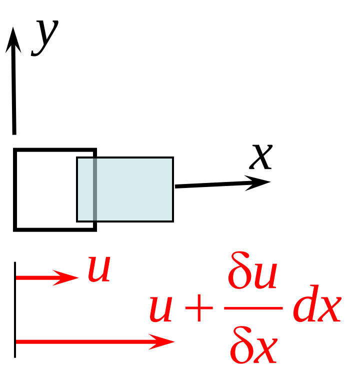




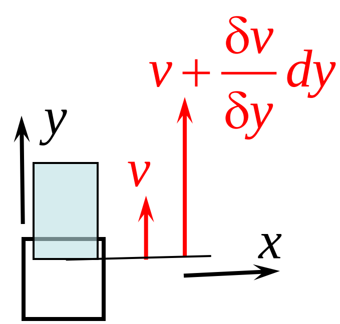
Tensore di Cauchy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Il significato fisico dei termini del tensore **ε** va legato a forme differenziali degli spostamenti di un corpo:



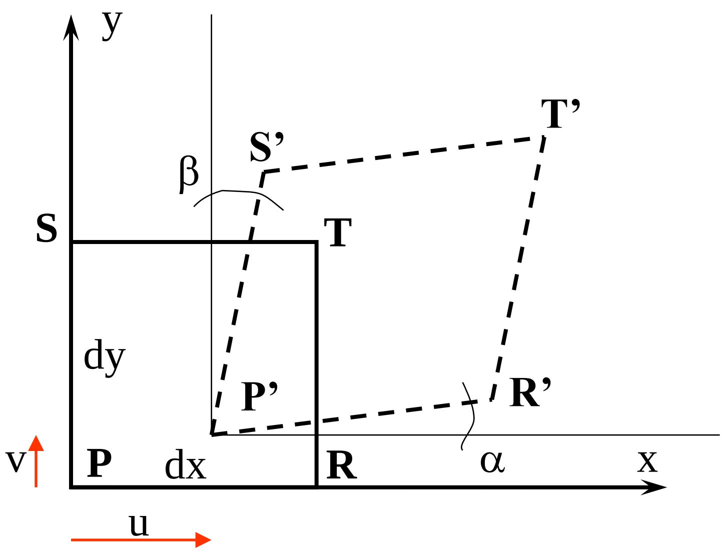
$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}}$$



$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y}}$$

Le precedenti espressioni sono scritte trascurando infinitesimi superiori al I ordine - PICCOLE DEFORMAZIONI

Vediamo invece, in 2 D, il significato fisico dei termini misti del tipo



$$\begin{cases} \boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}\right)} & + inf_{esimi} sup \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}\right) & + inf_{esimi} sup \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y}\right) & + inf_{esimi} sup \end{cases}$$

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x}dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \beta \approx \tan\beta = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\,\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

In pratica il termine misto misura la distorsione dell'angolo RPS
Analogamente per gli altri termini yz e xz

Il tensore **ε** ammette deformazioni principali e invarianti come il precedente **σ**

Legame tensione deformazione

Questo legame si esprime in modo semplice nel caso di:

1. comportamento lineare del materiale
2. Ambito di piccoli spostamenti
3. Ambito di piccole deformazioni
4. Corpo omogeneo (*proprietà indipendenti dal punto*)
5. Isotropia (*proprietà indipendenti dall'orientazione del Sistema Riferimento*)

In tali ipotesi valgono le equazioni di Navier, per quanto concerne i valori sulla diagonale principale e al di fuori da essa

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$$

Come si vede il legame è definito in base a 3 costanti (del materiale) che si riducono a 2 indipendenti considerando la relazione

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

E = modulo di Young / (Pressione) = Pa = N/m^2 MPa = N/mm^2
G = modulo elasticità trasversale / (Pressione) = Pa = N/m2 MPa = N/mm2
ν = coefficiente di contrazione laterale (Adimensionale)

Si hanno stati di tensione piano quando tutti i termini del tensore delle tensioni su una riga (e la corrispondente colonna) sono nulli.

Ad esempio se si tratta III riga (z): $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} \neq 0$

Questo caso si realizza ad esempio nelle sollecitazioni di lastre (*sollecitate membranalmente*) o piastre (*sollecitate flessionalmente*) **sottili**
Notare che tensioni piane corrispondono a deformazioni tridimensionali

Si hanno stati di deformazione piana quando tutti i termini del tensore delle deformazioni su una riga (e la corrispondente colonna) sono nulli.

Ad esempio se si tratta III riga (z): $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_z \neq 0$

Questo caso si realizza ad esempio nelle sollecitazioni di lastre (*sollecitate membranalmente*) o piastre (*sollecitate flessionalmente*) **spesse** e intagliate (concentrazione tensione)
Notare che deformazioni piane corrispondono a tensioni tridimensionali

Per una lastra in pratica una deformazione piana indica che non si ha sotto carico una variazione di spessore

Esempio: Riprendendo il caso precedente, si calcolano le deformazioni per un acciaio

$E = 2.06\ 10^{11}$ Pa $\nu = 0.3$ $G = 7.92\ 10^{10}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{2.06 \cdot 10^{11}}\left[-12 \cdot 10^{6} - 0.3\left(55 \cdot 10^{6} + 90 \cdot 10^{6}\right)\right] = -2.69 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{2.06 \cdot 10^{11}}\left[55 \cdot 10^{6} - 0.3\left(-12 \cdot 10^{6} + 90 \cdot 10^{6}\right)\right] = 1.53 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{2.06 \cdot 10^{11}}\left[90 \cdot 10^{6} - 0.3\left(-12 \cdot 10^{6} + 55 \cdot 10^{6}\right)\right] = 3.74 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

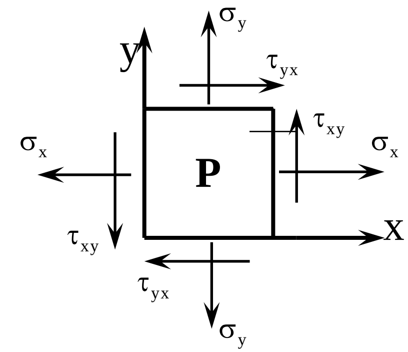
$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{-5 \cdot 10^{6}}{7.92 \cdot 10^{10}} = 6.31 \cdot 10^{-5} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{60 \cdot 10^{6}}{7.92 \cdot 10^{10}} = 7.57 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{32 \cdot 10^{6}}{7.92 \cdot 10^{10}} = 4.04 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Appare evidente che se il sistema di riferimento prevede $\boldsymbol{\sigma}$ principali ($\tau = 0$) - termini fuori diagonale nulli - esso rende anche il tensore $\boldsymbol{\varepsilon}$ principale ($\gamma = 0$)

Ma come si determinano i valori delle tensioni/deformazione principali e le loro direzioni?

Prima vediamo il caso 2D e poi quello 3D

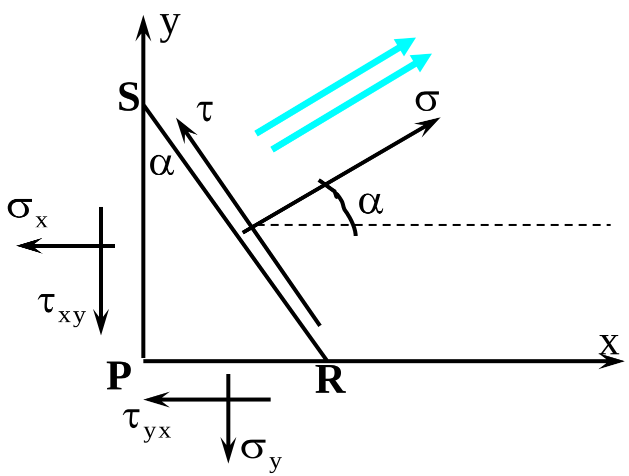
CIRCONFERENZE DI MOHR (2D)



La circonferenza di Mohr descrive lo stato di tensione rispetto ad un fascio di piani avente per sostegno un asse che coincide con una direzione principale (se 2D una direzione principale è ortogonale al piano)

Nella figura risulta $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

☆ Tale rappresentazione non è utile se non è nota almeno una delle direzioni principali



☆ **Si assume che τ > 0 se la rotazione è antioraria**

In tal modo rotazioni nel riferimento geometrico e nel piano di Mohr (piano τ-σ) <u>con τ verso basso</u> hanno lo stesso verso

$$\overline{PS} = \overline{RS}\ \cos\alpha$$

$$\overline{PR} = \overline{RS}\ \operatorname{sen}\alpha$$

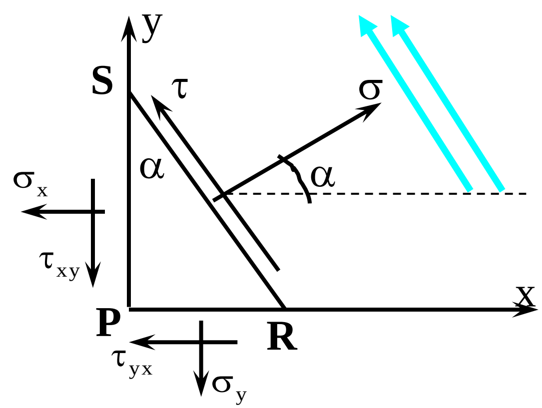
Si impone l'equilibrio delle risultanti nella direzione di α:

$$\sigma(\alpha) = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$= \tau_{xy}\operatorname{sen}2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_x\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_y\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_x\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_y\operatorname{sen}^2\alpha +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\sigma_x\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\sigma_x\operatorname{sen}^2\alpha\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma_y\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\sigma_y\cos^2\alpha\right)$$

$$\boxed{\sigma(\alpha) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\alpha}$$



Ora si impone l'equilibrio in direzione ortogonale rispetto ad α:

$$\tau(\alpha) = \sigma_x\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - \sigma_y\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - \tau_{yx}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + \tau_{xy}\cos^2\alpha$$

$$\boxed{\tau(\alpha) = \tau_{xy}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\,\mathrm{sen}\,2\alpha}$$

Se riferimento x-y è principale ($\tau_{xy} = 0$) risultano le equazioni parametriche di una circonferenza

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha \\ \tau = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{sen}2\alpha \end{cases}$$

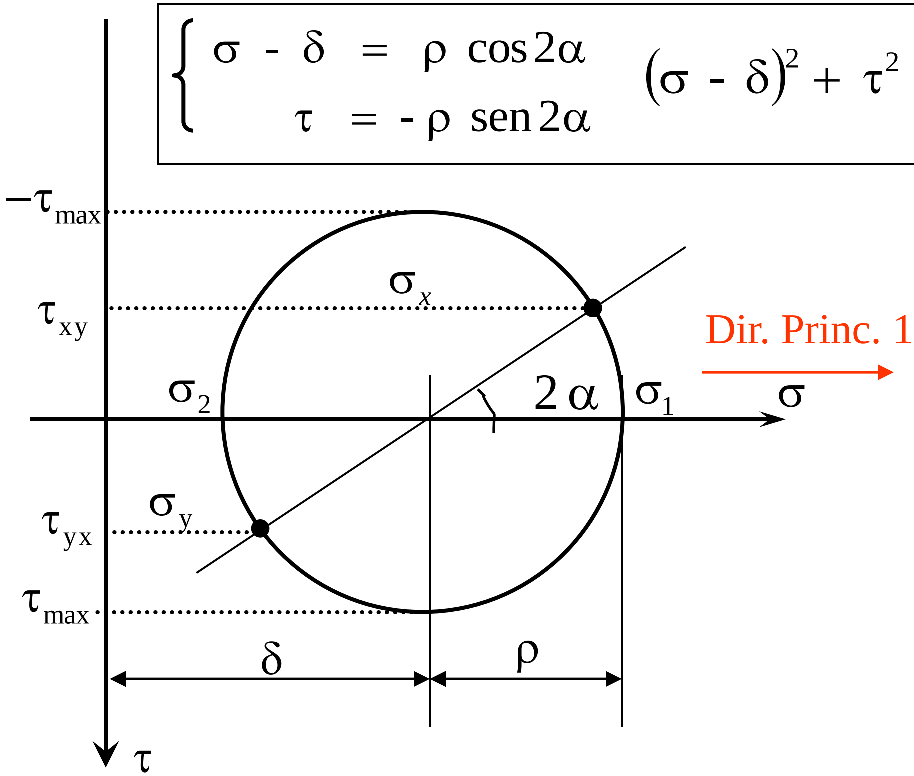
Infatti posto

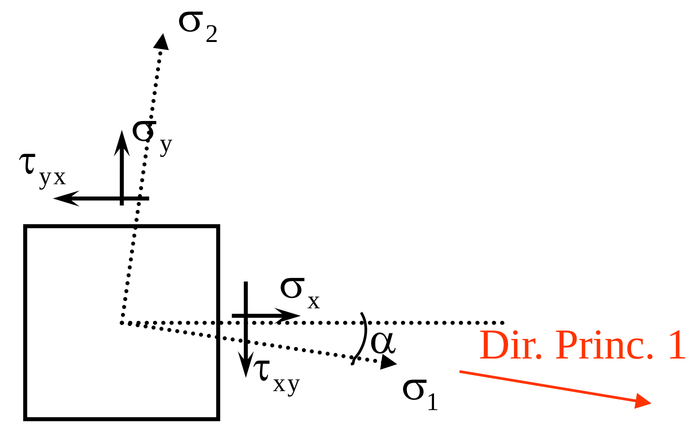
$$\delta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{(shift origine)}$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{(raggio)}$$

$$\begin{cases} \sigma - \delta = \rho\cos 2\alpha \\ \tau = -\rho\,\mathrm{sen}\,2\alpha \end{cases} \Longrightarrow \text{Quadrando e sommando} \quad (\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

$$\begin{cases} \sigma - \delta = \rho \cos 2\alpha \\ \tau = -\rho \ \mathrm{sen}\, 2\alpha \end{cases} \qquad (\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$





Le rotazioni mantengono lo stesso verso

Note le due tensioni principali e le loro direzioni (ortogonali nel piano fisico – su un diametro nel piano di Mohr) si possono determinare geometricamente le σ e τ per ogni rotazione α del sistema di riferimento

Ad esempio se $\begin{cases} \sigma_1 = 150 \\ \sigma_2 = -100 \end{cases}$ Si vuole sapere lo stato tensionale dopo rotazione oraria di 40°

$$\sigma_x = \delta + \rho \cos 2\alpha = 25 + 125 \ \cos(80°) = 46.7$$

$$\sigma_y = \delta - \rho \cos 2\alpha = 25 - 125 \ \cos(80°) = 3.3$$

$$\tau_{xy} = -\rho \ \mathrm{sen}\, 2\alpha = -125 \sin(80°) = -123.1$$

$$\begin{bmatrix} 46.7 & -123.1 \\ -123.1 & 3.3 \end{bmatrix}$$

IL passaggio inverso (dalla matrice che rappresenta il tensore alle tensioni principali) si attua applicando il teorema di Pitagora

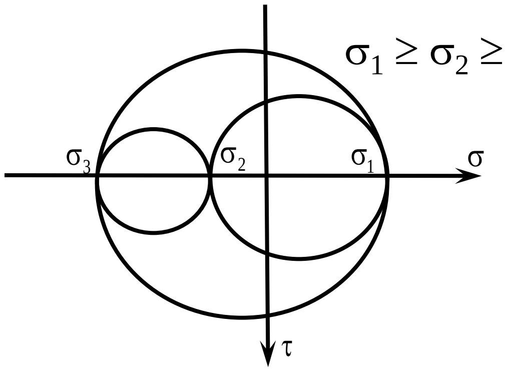
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Mentre la direzione nel piano fisico su cui si appoggia la tensione principale σ_1 si ricava annullando la τ

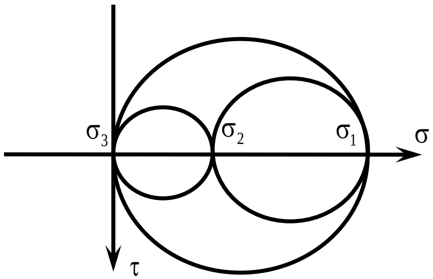
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

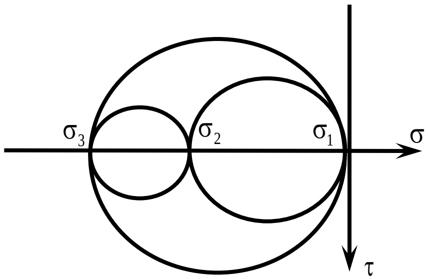
La costruzione di Mohr si può rifare appoggiandosi alle tre direzioni principali, si ottengono così 3 circonferenze



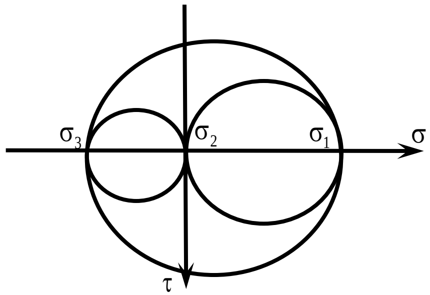
Se invece una delle tensioni principali è nulla – stato di tensione piano – una delle 3 tensioni principali risulta nulla e così possiamo distinguere 3 casi



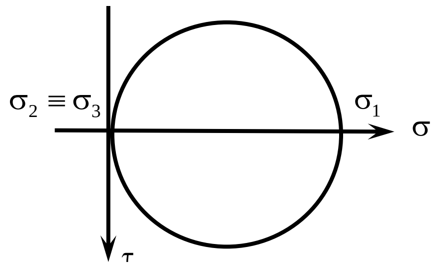
Solo trazione



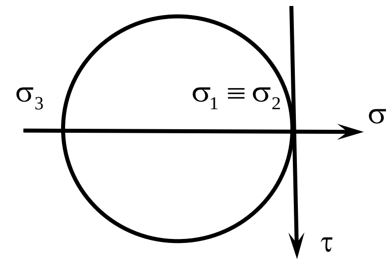
Solo compressione



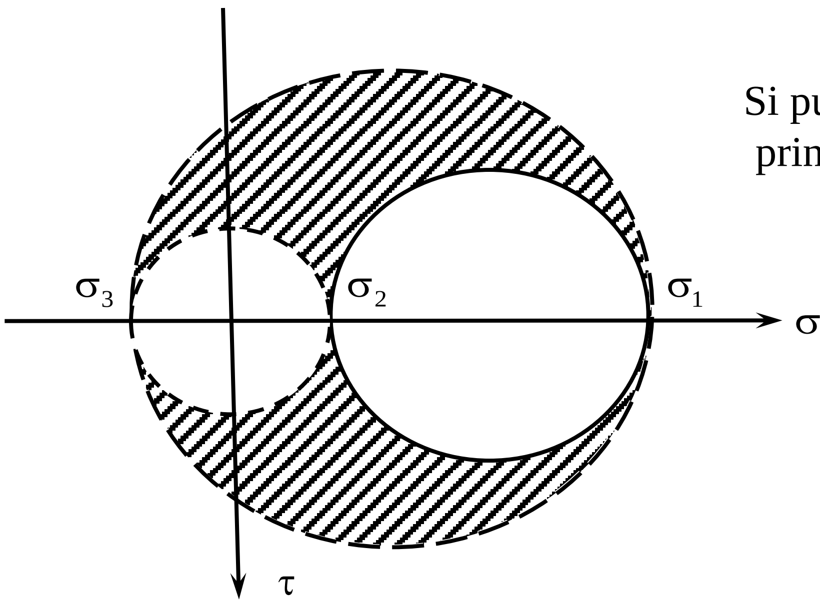
Mista



Monodimensionale - trazione



Monodimensionale - compressione



Si può dimostrare che appoggiandosi ad una direzione non principale, i punti nel piano di Mohr che corrispondono a valori di σ- τ si posizionano nell'area tratteggiata

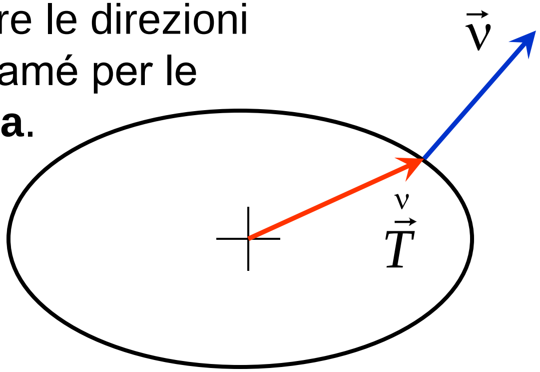
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Tensione idrostatica - Le circonferenze degenerano in un unico punto

I cerchi di Mohr si possono costruire anche per il tensore deformazione

Ricerca delle tensioni principali 3D (valori e direzioni appoggio)

Ripartendo dalle relazioni di Cauchy, in termini matematici, ricercare le direzioni principali equivale a dire cercare quelle direzioni nell’ellissoide di Lamé per le quali **la normale alla superficie coincide con la direzione stessa**.



$$\boxed{\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{j\,i}\,\nu_j \qquad \text{con } i = 1 \ldots 3}$$

Es $\vec{\overset{\nu}{T}}$ non // a $\vec{\nu}$ - direzione non principale

La condizione di parallelismo equivale ad un rapporto costante tra le componenti dei vettori

$$\overset{\nu}{T}_i = \lambda\,\nu_i \quad \Rightarrow \quad \sigma_{j\,i}\,\nu_j - \lambda\,\nu_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

Che può scriversi nella forma: $\left(\sigma_{j\,i} - \lambda\,\delta_{j\,i}\right)\nu_j = 0 \qquad i = 1, 2, 3$

Ne risulta un classico problema agli autovalori

Il problema della ricerca degli autovalori riguarda la ricerca di soluzioni non banali di un sistema di equazioni algebrico omogeneo – in pratica si cercano quei λ che annullano il determinante della matrice dei coefficienti

$$Det \begin{Vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \lambda \end{Vmatrix} = 0$$

In alternativa, si può ricorrere agli invarianti del tensore:

Minori complementari diagonale principale

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \Theta_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \\ \Theta_3 = \mathrm{Det} \|\sigma\| \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sigma^3 - \Theta_1 \sigma^2 + \Theta_2 \sigma - \Theta_3 = 0}$$

- Trovati i tre λ_i si ottengono i 3 $\vec{v}$ e con Cauchy le 3 σ principali
- Le tensioni principali sono ordinate algebricamente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
- L'assenza di alcune di esse dà stati tensione piano, monodimensionale
- Se $\Theta_3 = 0$ $\Rightarrow$ Tensione piana / Se anche $\Theta_2 = 0$ $\Rightarrow$ Tens. Monod.le

Esempio:

Consideriamo il seguente tensore di deformazione

$$\begin{bmatrix} 88.4889 & 6.9427 & -59.9154 \\ 6.9427 & 103.5721 & -3.2374 \\ -59.9154 & -3.2374 & -12.0610 \end{bmatrix}$$

Si vogliono determinare le tensioni principali e le direzioni di appoggio nel sistema di riferimento con il quale è stato scritto il tensore su riportato

Innanzitutto si determinano gli invarianti

$$\begin{cases} \Theta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 180.0 \\ \Theta_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = 3.2 \cdot 10^3 \\ \Theta_3 = Det \ \|\sigma\| = -4.8 \cdot 10^5 \end{cases}$$

L’equazione di III grado che, risolta, fornisce i tensori principali e’:

$$\sigma^3 - \Theta_1 \, \sigma^2 + \Theta_2 \, \sigma - \Theta_3 = 0$$

Non è banale risolvere una equazione di III grado, la cosa più semplice è isolare un termine e risolvere per tentativi – ciò è abbastanza veloce

$$\sigma^3 - 180 \, \sigma^2 + 3.2 \cdot 10^3 \Theta_2 \, \sigma + 4.8 \cdot 10^5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\mathrm{Pr}} = \sqrt[3]{\Theta_1 \, \sigma^2 - \Theta_2 \, \sigma + \Theta_3}$$

La soluzione la cerchiamo per tentativi, ricordando che se

$$\sigma_{Pr} > \sqrt[3]{\Theta_1\ \sigma_{Pr}^2 - \Theta_2\ \sigma_{Pr} + \Theta_3}$$

Occorre diminuire il valore tentativo

$$\sigma_{Pr} < \sqrt[3]{\Theta_1\ \sigma_{Pr}^2 - \Theta_2\ \sigma_{Pr} + \Theta_3}$$

Occorre aumentare il valore tentativo

sx	dx	scarto	
400	300.1481	99.8519	Diminuire
200	182.5161	17.4839	Diminuire
140	137.5069	2.4931	Diminuire
110	110.4117	-0.4117	Aumentare
115	115.2923	-0.2923	Aumentare
120	120	0	

N.B. se si “saltano” delle soluzioni, le inversioni di segno possono essere differenti da quelle indicate. Non ha però importanza perché ci basta determinare una qualunque delle tensioni principali

Conviene utilizzare come I tentativo “*trace(σ)*”

Le altre due rimanenti si determinano abbassando di grado il polinomio di III grado

	1	$-I_1$	I_2	$-I_3$
σ_{pr}		σ_{pr}	$\sigma_{pr}^2 - I_1\sigma_{pr}$	$I_2\sigma_{pr} + \sigma_{pr}^3 - I_1\sigma_{pr}^2$
	1 a	$\sigma_{pr} - I_1$ b	$I_2 + \sigma_{pr}^2 - I_1\sigma_{pr}$ c	//

$$\sigma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Nell'esempio in esame si ha: $b=-60 \quad c=-4000$ | $\sigma=\dfrac{-60\pm\sqrt{3600+4\cdot 4000}}{2}=-60\pm 140$

Una volta riordinate si ottiene: $\boxed{\sigma_1=120 \qquad \sigma_2=100 \qquad \sigma_3=-40}$

Per la direzione di appoggio, si risolve il sistema a meno di un coefficiente ($\nu_x=1$)

$$\boxed{\sigma_{j\,i}\ \nu_j-\lambda\ \nu_i=0 \qquad i=1,2,3} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x\ \nu_x+\tau_{yx}\ \nu_y+\tau_{zx}\ \nu_z-\sigma_1\nu_x=0 \\ \tau_{yx}\ \nu_x+\sigma_y\ \nu_y+\tau_{yz}\ \nu_z-\sigma_1\nu_y=0 \\ \tau_{zx}\ \nu_x+\tau_{zy}\ \nu_y+\sigma_z\ \nu_z-\sigma_1\nu_z=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 88.4889 & 6.9427 & -59.9154 \\ 6.9427 & 103.5721 & -3.2374 \\ -59.9154 & -3.2374 & -12.0610 \end{bmatrix}$$

Abbiamo annullato il determinante quindi 2 sole equazioni (le prime due) sono indipendenti

$$\begin{cases} 88.4889+6.9427\ \nu_y-59.9154\ \nu_z=\sigma_1 \\ 6.9427\ +103.5721\ \nu_y-3.2374\ \nu_z=\sigma_1\nu_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6.9427\ \nu_y-59.9154\ \nu_z=(-88.4889+120) \\ (103.5721-120)\ \nu_y-3.2374\ \nu_z=0 \end{cases}$$

Soluzione: $\begin{cases} \nu_y=0.5372 \\ \nu_z=\text{-}0.4637 \end{cases}$

Si normalizza versore direzione: $\nu_i^{(norm)}=\nu_i\Big/\sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nu_x=0.8155 \\ \nu_y=0.4381 \\ \nu_z=-0.3762 \end{cases}}$