Tensione equivalente o ideale – Teorie di rottura

Sollecitazioni monodimensionali: le condizioni di limite o di rottura si determinano facilmente

Se sollecitazioni sono pluridimensionali (invarianti tutti non nulli) , ha interesse determinare una tensione equivalente monodimensionale per avere un riferimento semplice con delle prove di resistenza (ad esempio trazione) – Viene chiamata **tensione ideale**

$$\sigma_{\text{ideale}} = \Phi\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$$

Quest'ultima viene confrontata con la tensione limite per valutare la criticità del componente

$$\sigma_{\text{limite}} = \begin{cases} \sigma_{sn} & \text{materiali duttili} \\ \sigma_{rot} & \text{materiali fragili} \end{cases}$$

I criteri di rottura sono sostanzialmente semiempirici, pertanto ne esistono molti e nessuno di essi ha validità generale. In genere, a seconda del materiale si sceglie il criterio più adatto da utilizzare

Ogni criterio è caratterizzato da una ipotesi di cedimento, ossia da un parametro che, raggiunto un valore limite, causa la rottura del componente

Tutti i criteri necessitano di *taratura* sperimentale, pertanto sono in genere semplici altrimenti richiederebbero il *tuning* di molti parametri perdendo inevitabilmente di applicabilità *e di precisione*.

In questo caso se ne esamineranno cinque, i più utilizzati, secondo una strategia di analisi che prevede i seguenti punti di vista:

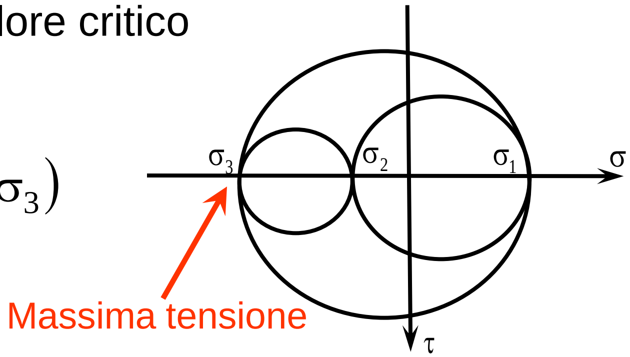
1) Esplicitazione dell'ipotesi di cedimento
2) Applicazione dell'ipotesi in presenza di σ_1 , σ_2 , σ_3
3) Particolarizzazione dell'ipotesi al caso monodimensionale
4) Esame caso piano in un riferimento non principale
5) Confronto cedimento in sollecitazione di trazione semplice e torsione pura

---

I) MASSIMA TENSIONE NORMALE (Rankine)

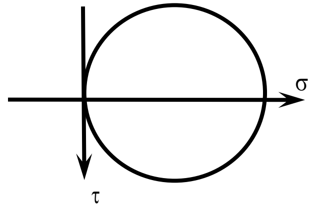
1) Si ha rottura quando σ_{MAX} raggiunge un valore critico

2) $$\sigma_{id} = \begin{cases} \sigma_1 & \text{se} \quad |\sigma_1| \geq |\sigma_3| \\ -\sigma_3 & \text{se} \quad |\sigma_3| > |\sigma_1| \end{cases} \qquad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$



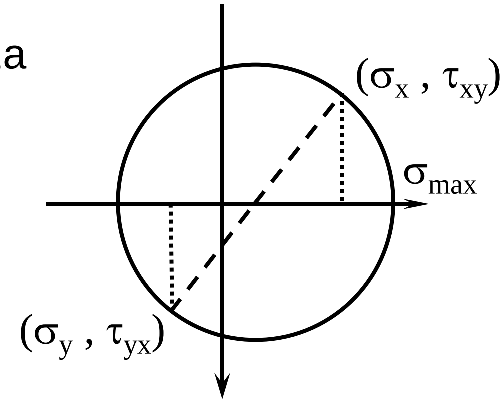
Conta solo il valore della tensione più spostata dall'origine del piano di Mohr, le altre due non influenzano la resistenza

3) E' identico al punto precedente, ma una sola σ principale è ora presente (trazione)

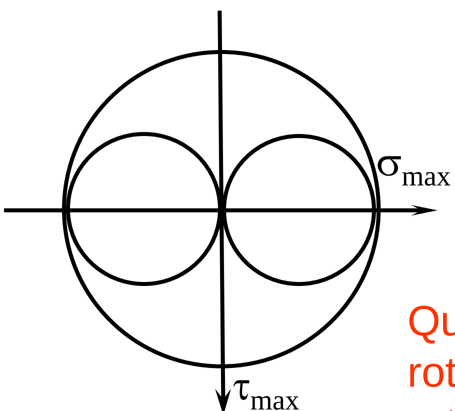


4) Nel caso piano si può tracciare la circonferenza di Mohr e determinare da essa la tensione massima

$$\sigma_{ideale} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



5) La sollecitazione di torsione è caratterizzata da una tensione tangenziale massima a 45° nel piano fisico (in quello di Mohr a 90° e quindi da σ_3=- σ_1 e σ_2 = 0.



$$\sigma_{lim} = \tau_{lim} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_{lim}}{\tau_{lim}} = 1}$$

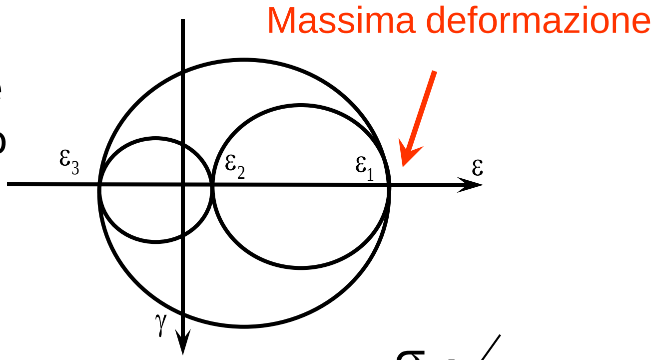
Quindi, secondo questa teoria, la tensione che comporta la rottura a trazione è uguale a quella tangenziale che comporta la rottura a torsione

II) MASSIMA DEFORMAZIONE AMMISSIBILE (Bach)

1) Si realizza la rottura se ε_{MAX} raggiunge un valore critico o limite

2) $$\varepsilon_{id} = \begin{cases} 1/E\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] & \text{se} \quad |\varepsilon_1| \geq |\varepsilon_3| \\ -1/E\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] & \text{se} \quad |\varepsilon_3| \geq |\varepsilon_1| \end{cases} \qquad (\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3)$$

Anche in questo II criterio si risente solo del valore principale della **deformazione** più spostato rispetto all'origine del piano di Mohr, le altre due non influenzano la resistenza

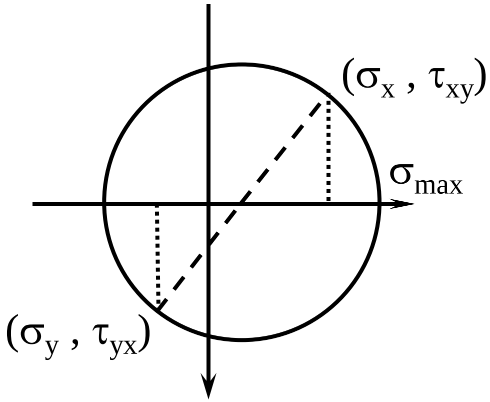


3) Nella semplice sollecitazione di trazione (monodimensionale) risulta $\varepsilon_{id} = \sigma_{id}/E$

Quindi si può esplicitare il legame in termini di tensione $\sigma_{id} =$ $\begin{cases} \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ -\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{cases}$

Rispetto al criterio di Rankine, stati tridimensionali di tensione tendenti all'idrostatico incrementano la resistenza (diminuendo la tensione equivalente o ideale)

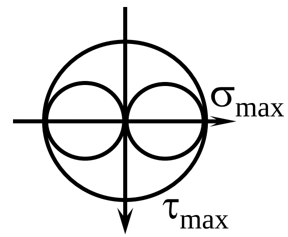
4) Nel caso piano non principale (σ_3=0) *Considerando:* $\sqrt{*} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{*} - \nu\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \nu\sqrt{*} =$$

$$\sigma_{id} = (1-\nu)\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(1+\nu)}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

5) In presenza di semplice torsione



$$\sigma_{id} = (1+\nu)\tau$$

Pertanto ci si deve aspettare di raggiungere le medesime condizioni limite a trazione ed a torsione semplice quando

$$\boxed{\tau_{lim} = \frac{\sigma_{lim}}{(1+\nu)} = 0.77\sigma_{lim}}$$

Si consideri che una barra cilindrica di raggio r soggetta a torsione semplice presenta una τ al raggio esterno pari a :

$$\boxed{\tau_r = \frac{2M_{tor}}{\pi r^3}}$$

III) MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE (Guest / Tresca)

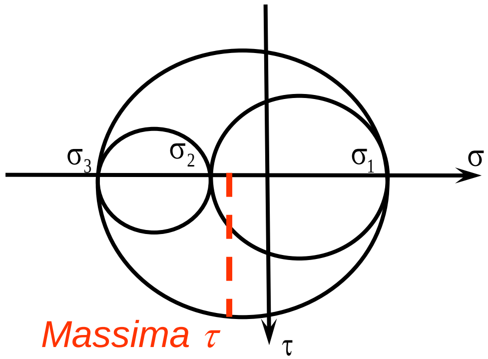
1) Si realizza la rottura se τ_{MAX} raggiunge un valore critico o limite

In questo caso quindi non ci si riferisce ai valori principali dei tensori, bensì alla massima componente distorsiva

2) Caso tridimensionale

(Massima circ. Mohr)

$$\tau_{id} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



3) Caso monodimensionale

$$\tau_{id} = \frac{\sigma_{id}}{2} \Longrightarrow \sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$$

4) Nel caso piano non principale (σ_3=0)

Considerando:

$$\sqrt{*} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{id} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{*} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{*}$$

$$\boxed{\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Spesso questa formula si trova in forma semplificata, valida per alberi ove le sollecitazioni critiche sono in genere combinazioni di trazione, flessione, torsione

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

5) In presenza di sola torsione $\sigma_{id} = 2\,\tau$ ⇒ $\boxed{\tau_{lim} = \frac{\sigma_{lim}}{2} = 0.5\,\sigma_{lim}}$

Un errore abbastanza tipico commesso da frettolosi strutturisti è quello di trascurare la componente nulla della tensione quando si analizza uno stato di *<u>tensione piano</u>*

Se σ_1 = 120 MPa e σ_2 = 50 MPa ⇒

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{\sigma_{id} = 120 - 50 = 70\ \text{MPa}} \\ \sigma_{id} = 120 - 0 = 120\ \text{MPa} \end{array} \right.$$

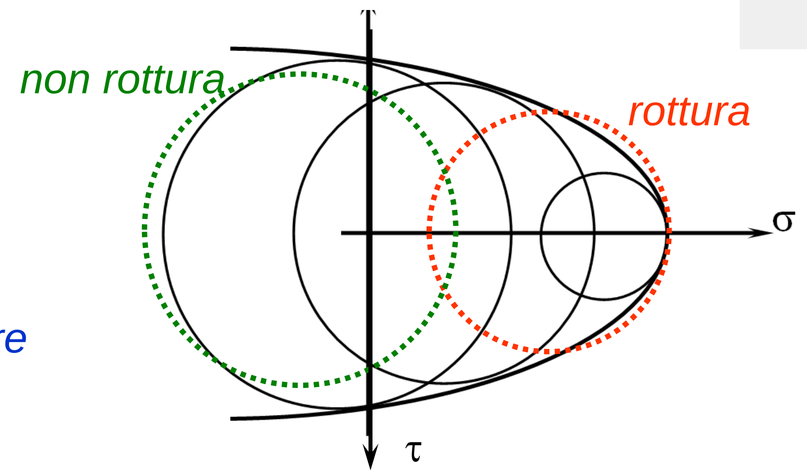
Se σ_1 = 120 MPa e σ_2 = -10 MPa ⇒ $\sigma_{id} = 120 - (-10) = 130$ MPa

Questo errore è purtroppo semiautomatico quando si effettua calcolo strutturale con elementi bidimensionali (piastre o lastre). A tal fine occorrerà molta cautela nella post-processazione dei calcoli, al momento di definire le tensioni equivalenti per valutare se si è in condizioni di criticità o meno

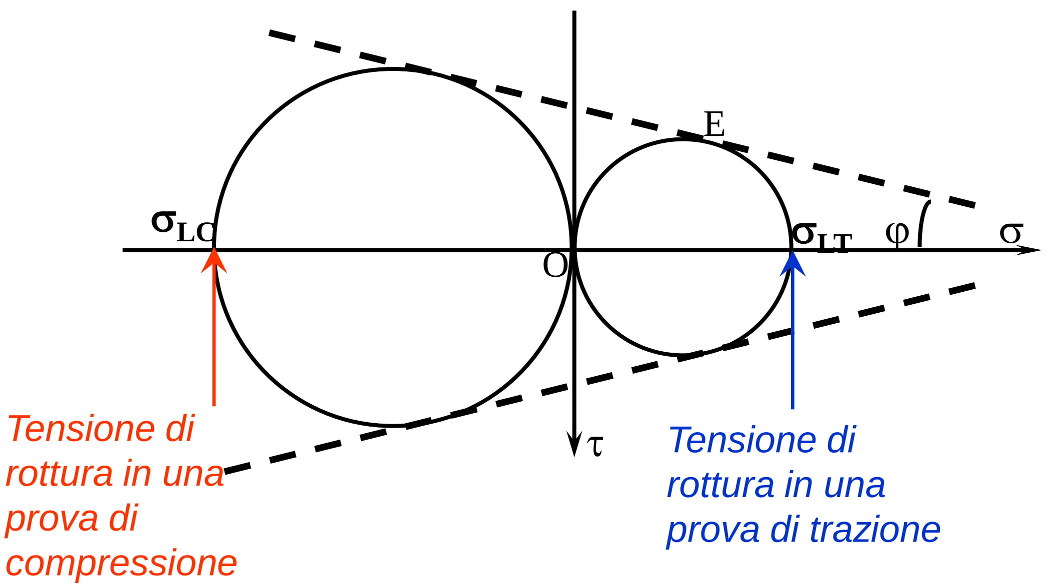
IV) TEORIA DELLA CURVA INTRINSECA (Mohr)

1) Si realizza la rottura se, in un piano di Mohr, il cerchio massimo fuoriesce da una determinata **curva limite**

Così citato il criterio non è così utilizzabile in quanto non è dato sapere come generare la curva limite se non effettuando molteplici prove con stati di tensione complessi (… difficile).

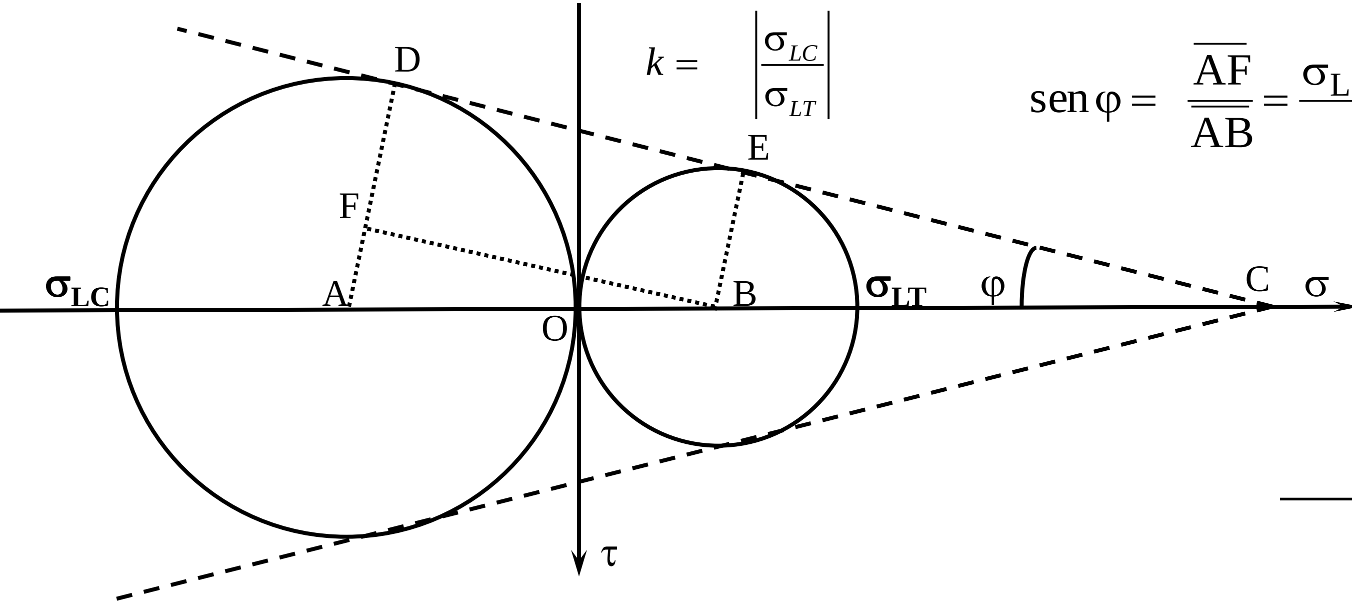


Per tale motivo e, come si vede dall'analisi delle concavità, a favore di sicurezza, si provvede a costruire in forma semplificata la curva intrinseca



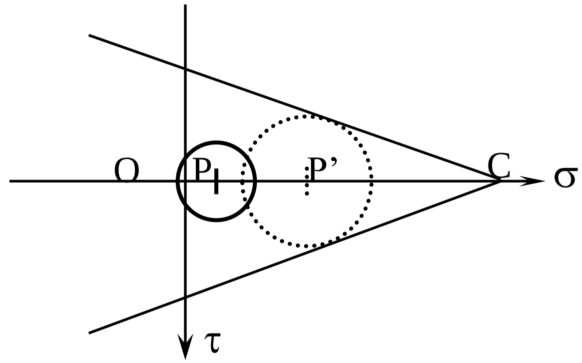
La curva intrinseca si restringe o si allarga in funzione del rapporto

$$k = \left| \frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{LT}} \right|$$



$$k = \left|\frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{LT}}\right|$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\sigma_{LC}-\sigma_{LT}}{2}\cdot\frac{2}{\sigma_{LC}+\sigma_{LT}} = \frac{k-1}{k+1}$$



2 e 3) Un generico stato di tensione si rappresenta con il massimo cerchio

Da uno stato (OP,r) si ipotizzi una crescita proporzionale (α) fino a (OP',r')

$$\begin{cases} \overline{OP} = \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \\ r = \dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{OP'} = \alpha\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \\ r' = \alpha\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \end{cases}$$

$$r' = \left(\overline{OB}+\overline{BC}-\overline{OP'}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\alpha}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \left[\frac{\sigma_{LT}}{2}+\frac{\sigma_{LT}}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}-\frac{\alpha}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]\frac{k-1}{k+1}$$

Dividendo ambo i membri per α, e ricordando, per definizione

$$\boxed{\alpha\,\sigma_{id} = \sigma_{LT}}$$

$$\sigma_1\left(1+\frac{k-1}{k+1}\right)-\sigma_3\left(1-\frac{k-1}{k+1}\right) = \sigma_{id}\frac{k-1+k+1}{k+1}$$

$$\boxed{\sigma_{id} = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k}}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k}$$

La teoria di Mohr coincide con Rankine se $\sigma_{LC} >> \sigma_{LT}$ $\quad (k >> 1) \quad \sigma_{id} \cong \sigma_1$

La teoria di Mohr coincide con Tresca se $\sigma_{LC} = \sigma_{LT}$ $\quad (k = 1) \quad \sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$

In pratica si evidenzia il vantaggio del criterio di Mohr, in grado di essere applicato a materiali differenti, governati da criteri di rottura di differente tipologia

4) Nel caso piano non principale (σ_3=0)

Considerando: $\sqrt{*} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$$\sigma_{id} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{*} - \frac{1}{k}\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{k}\sqrt{*}$$

$$\sigma_{id} = \frac{k-1}{k}\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \frac{k+1}{2k}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

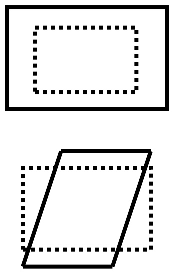
5) In presenza di sola torsione $\quad \sigma_{id} = \frac{k+1}{k}\tau$

$$\boxed{\tau_{lim} = \frac{k}{k+1}\sigma_{lim}}$$

Il criterio può quindi essere efficacemente utilizzato, quasi in ogni caso, basta conoscere la resistenza limite del materiale sottoposto a trazione o a torsione.

V) MASSIMA ENERGIA DI DISTORSIONE (Von Mises)

1 e 2) Si ha rottura se la sola energia associata alla distorsione (variazione di forma e non di volume) raggiunge un valore critico



U' = energia deformazione idrostatica

U'' = energia di deformazione di sola distorsione

U = energia deformazione

Somma

L'energia di distorsione U" viene calcolata per differenza, avendo prima U e U'

Per un punto di un materiale lineare elastico, nel riferimento principale e per un volume di riferimento unitario

$$U = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma \, d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_f \, \varepsilon_f$$

(energia = lavoro = forza x spost)

monodimensionale

3D

$$U = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3\right)$$

Usando $\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \\ - - - - - - - \end{cases}$

$$U = \frac{1}{2\,E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\,\left(\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1\right)\right]$$

SI calcola ora l'energia derivante dalla sola componente idrostatica

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Se tutte le tre tensioni fossero uguali a σ_m l'energia diventerebbe quella sola idrostatica (U')

$$U' = \frac{1}{2\,E}\left(3\,\sigma_m^2 - 6\nu\,\sigma_m^2\right) = \cdots\left[\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right]\cdots = \frac{1-2\nu}{6\,E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2$$

$$U' = \frac{1-2\nu}{6\,E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\,\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_2\,\sigma_3+\sigma_3\,\sigma_1\right)\right]$$

Si può calcolare U'' per differenza (Tra energie sommabilità vera solo se energie disaccoppiate)

$$U'' = \frac{1}{2\,E}\left[\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)\cdot\left(1-\frac{1-2\nu}{3}\right)-2\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_2\,\sigma_3+\sigma_3\,\sigma_1\right)\cdot\left(\nu-\frac{1-2\nu}{3}\right)\right]$$

Dopo alcune semplici manipolazioni si ottiene $U'' = \frac{1+\nu}{3\,E}\left[\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)-\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_2\,\sigma_3+\sigma_3\,\sigma_1\right)\right]$

3) In condizioni monodimensionali $U'' = \frac{1+\nu}{3\,E}\sigma_{id}^2$

E dal confronto $\sigma_{id} = \sqrt{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)-\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_2\,\sigma_3+\sigma_3\,\sigma_1\right)}$

Nella ipotesi di Von Mises (quella generalmente più accreditata nei materiali metallici da costruzione) stati di tensione di ugual segno tendono a diminuire la tensione ideale

4) Caso piano riferimento non principale *Considerando:* $a = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)$ $b = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Principale $\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$

Non principale $\sigma_{id} = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,a\,b) + (a^2 + b^2 - 2\,a\,b) - a^2 + b^2}$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\,\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

5) Rapporto tensione normale / tangenziale

$$\sigma_{id} = \sqrt{3}\,\tau \Rightarrow \boxed{\tau_{lim} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{lim}}$$

(0.577)

Quando è opportuno utilizzare un criterio o l’altro?

Dal punto di vista della sicurezza del risultato, esistono criteri più o meno sicuri?

Esempio:

Sia noto il seguente stato di tensione

Per un materiale con σ_{LT}= 300 σ_{LC}= -400

e ν= 0.3

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 & 25 & -48 \\ 25 & 30 & -60 \\ -48 & -60 & 70 \end{bmatrix} \qquad [MPa]$$

Utilizzando la metodologia precedentemente illustrata, si determinano le 3 tensioni principali:

$$\sigma_{pr} = [178.0 \qquad 70.2 \qquad -14.2]$$

1) Teoria max σ $\quad \sigma_{id(I)} = 178.0$ *(Coeff. Sicurezza)* X = 300/178 = 1.685

2) Teoria max ε $\quad \sigma_{id(II)} = 178.0 - 0.3(70.2 - 14.2) = 161.2$ X = 300/161.2 = 1.861

3) Teoria max τ $\quad \sigma_{id(III)} = 178.0 + 14.2 = 192.2$ X = 300/192.2 = 1.561

4) Teoria Mohr $\quad \sigma_{id(IV)} = 178.0 + \dfrac{14.2}{4/3} = 188.6$ X = 300/188.6 = 1.591

5) Teoria Von Mises X = 300/171.1 = 1.753

$$\sigma_{id(V)} = \sqrt{178.0^2 + 70.2^2 + 14.2^2 - (178.0 \cdot 70.2) + (178.0 \cdot 14.2) + (70.2 \cdot 14.2)} = 171.1$$

- Le 5 ipotesi descritte si avvicinano di più o meno alla realtà a seconda del materiale e delle sue condizioni di impiego

  - **Estremizzando** a materiali duttili e fragili

fragili
- Rankine
- Bach
- Ip. Mohr

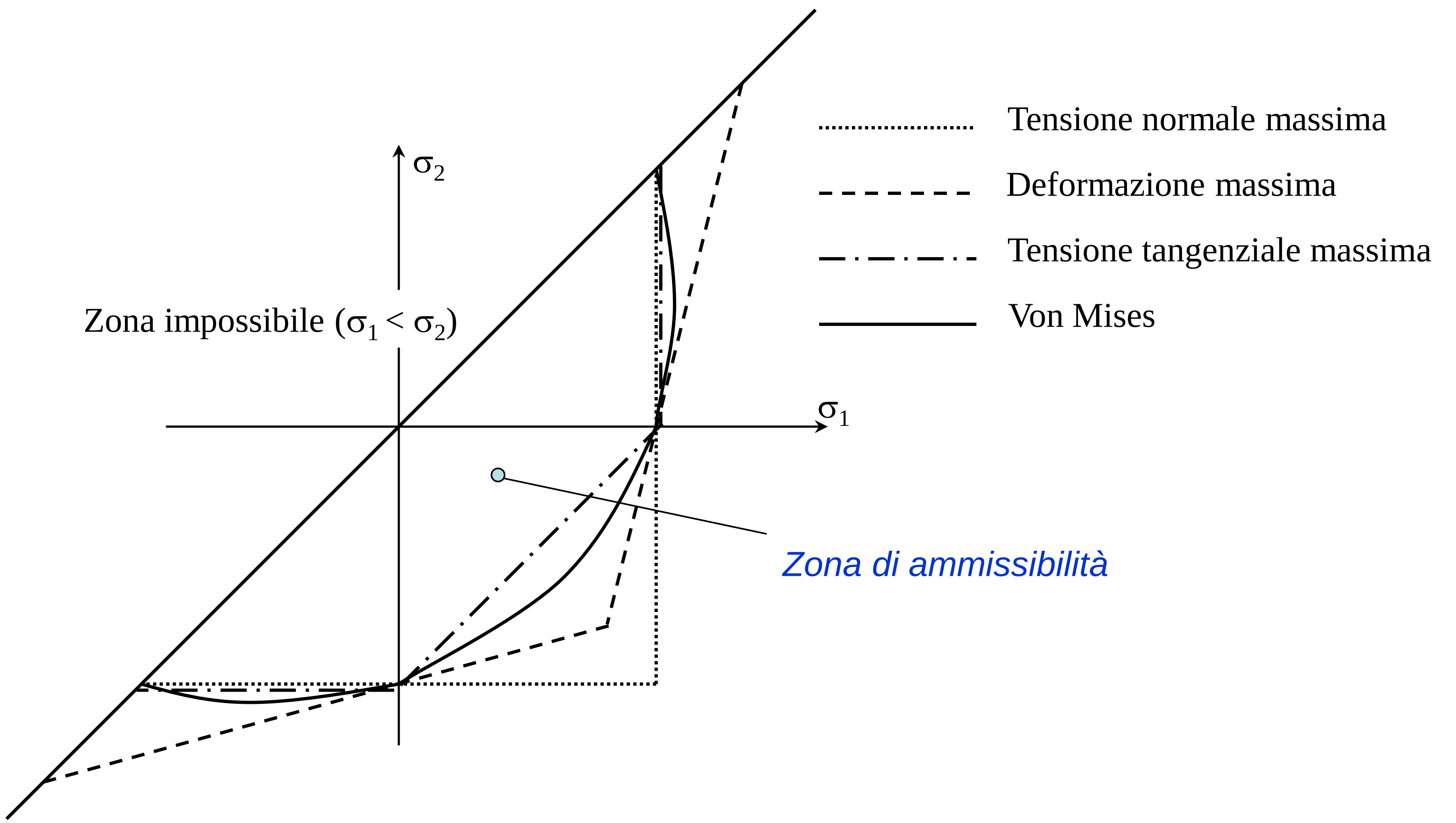
duttili
- Guest
- Ip. Mohr
- Von Mises

Un materiale si può definire duttile o fragile a seconda della energia immagazzinata prima della rottura (componente reversibile o elastica e irreversibile o plastica)

- Osservazioni:

- Basse temperature inducono materiali duttili a comportarsi fragilmente
- Stati fortemente triassiali tendono a spostare il comportamento verso rotture fragili
- Materiali fragili presentano tensioni rottura più alte a compressione che a trazione
- Rapporto torsione / tensione limite può aiutare nella scelta
- Alcuni criteri (molto semplici) si prestano *abbastanza* bene anche a materiali non omogenei (e.g. materiali compositi) e vengono quindi utilizzati in I analisi

Rappresentazione nel piano di Westergaard (piano $\sigma_1 - \sigma_2$)



In genere l'area più contenuta è quella del criterio di Tresca

I dati sperimentali per gli acciai da costruzione si posizionano attorno a Von Mises

Il criterio di Bach allunga molto l'area di ammissibilità rispetto agli altri