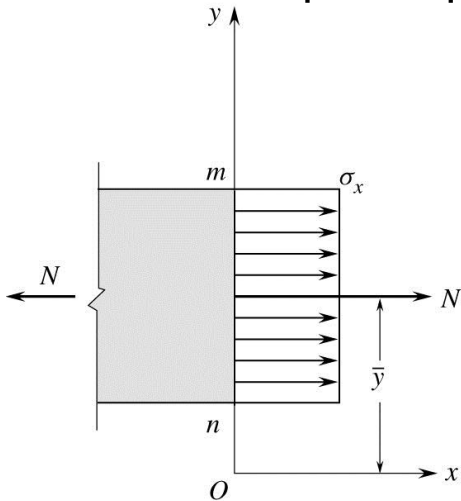
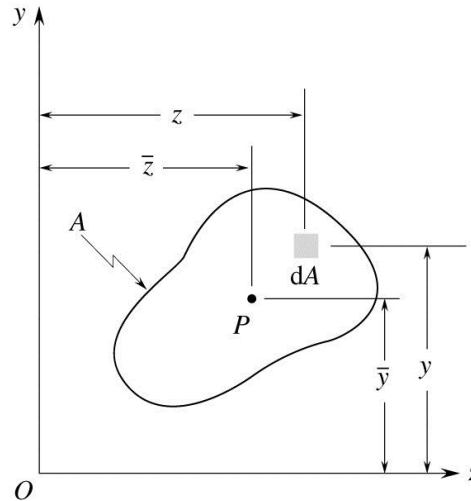


# Sollecitazione di Trazione

La sollecitazione di trazione (carico applicato in direzione dell'asse rettilineo dell'elemento monodimensionale) la si ripartisce nelle sezioni interne in modo uniforme, qualunque sia la forma dell'area



a)



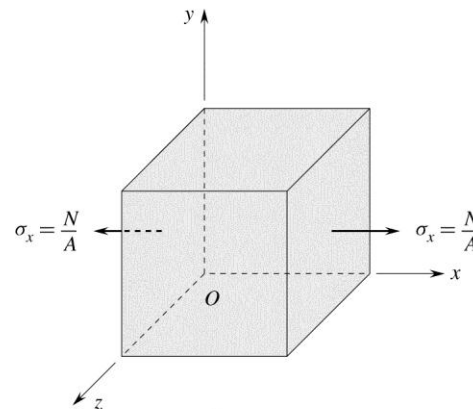
b)

$$N = \iint_A \sigma \, dA \quad \sigma = \frac{N}{A} = MPa$$

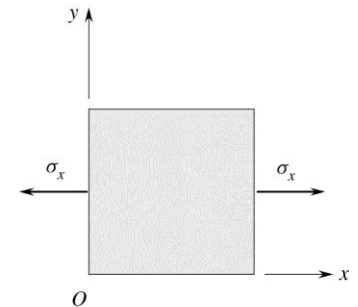
*costante*

*Questa approssimazione è tanto più veritiera quanto più le dimensioni trasversali sono piccole rispetto allo sviluppo longitudinale*

Pertanto, nel riferimento longitudinale, l'unica tensione non nulla è  $\sigma_x$  mentre il riferimento è principale in quanto le  $\tau$  sono nulle



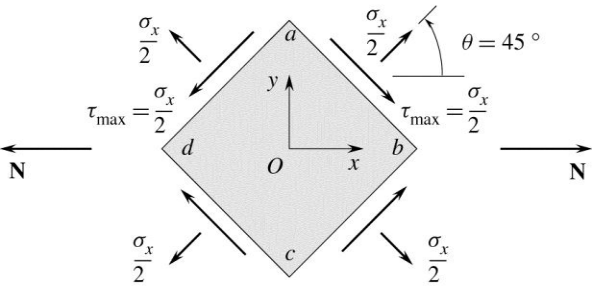
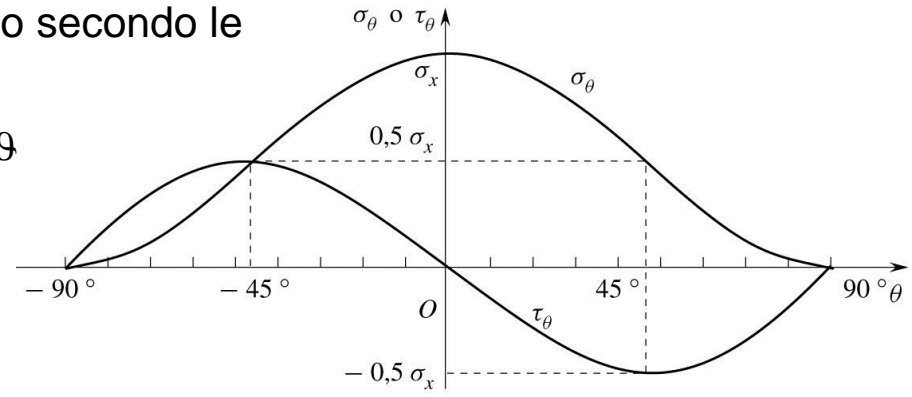
a)



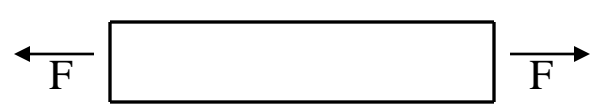
b)

Ruotando il sistema di riferimento di un angolo  $\alpha$ , sappiamo già dallo studio delle circonferenze di Mohr, che le tensioni varieranno secondo le

$$\begin{cases} \sigma(\vartheta) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\vartheta \\ \tau(\vartheta) = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\vartheta \end{cases}$$



*Non è corretto dire quindi che non ci sia sollecitazione di taglio nello sforzo normale, a 45° infatti il taglio è massimo e numericamente uguale a metà della tensione normale*



- ☆ Lo stato di tensione è monodimensionale
- ☆ Quello di deformazione è tridimensionale

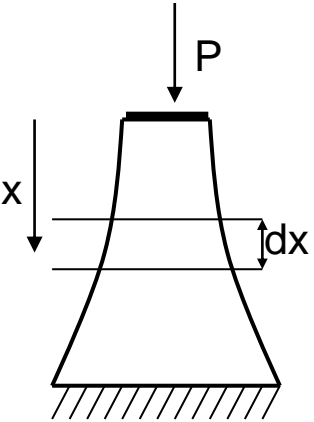
$$\sigma_x = \frac{F}{A} \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \cdot \epsilon_x \quad \text{Allungamento totale} \quad \Delta L = \frac{FL}{EA}$$

Energia elastica immagazzinata  $W = \frac{1}{2} F \Delta L = \frac{1}{2} \frac{F^2 L}{EA}$

## Sezione variabile per ricerca uniforme resistenza (utilizzo ottimo del materiale)

Con una certa cautela si può ancora considerare che sia  $\sigma = F/A$

Essendo  $A$  variabile, occorrerà integrare l'area lungo l'ascissa



*Ipotesi*  $\sigma_x = \text{Costante}$

Equilibrio di un elementino compreso tra due sezioni distanti  $dx$

$$-\sigma_x (A + dA) + \sigma_x A + \gamma A dx = 0 \quad \gamma = \text{peso specifico}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma_x} dx \quad \Rightarrow \quad A = C e^{\frac{\gamma}{\sigma_x} x}$$

Si impone, come condizione al contorno, che per  $x = 0$  sia  $A = A_0$

$$A = A_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma_x} x}$$

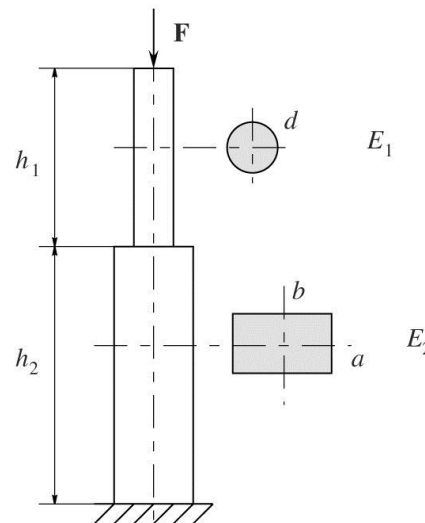
## Esempio 1: calcolo deformazione

Lo sforzo è di compressione in tutte le sezioni

$$N = -F = -100\,000\text{ N}$$

Le due aree valgono

$$A_1 = \frac{\pi}{4} d^2 = 706.9\text{ mm}^2 \quad A_2 = a b = 1200\text{ mm}^2$$



$F =$	100	kN
$h_1 =$	0,7	m
$h_2 =$	1	m
$E_1 =$	70 000	MPa
$E_2 =$	210 000	MPa
$d =$	30	mm
$b =$	40	mm
$a =$	30	mm

tensioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{-100000}{706.9} = -141.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_2 = \frac{-100000}{1200} = -83.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{array} \right.$$

deformazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{-141.5}{70000} = 2.021 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{-83.3}{210000} = 3.97 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

allungamento

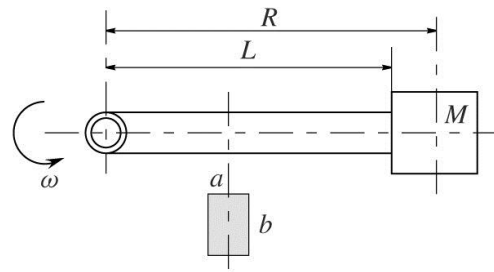
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta h_1 = h_1 \varepsilon_1 = -1.41\text{ mm} \\ \Delta h_2 = h_2 \varepsilon_2 = -0.39\text{ mm} \end{array} \right.$$

Energia elastica immagazzinata

$$W = \frac{1}{2} F (\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{100000}{2} (1.41 + 0.39) \cdot 10^{-3} = 90.57\text{ J}$$

## Esempio 2: perno rotante

La sollecitazione nasce dalla rotazione della massa concentrata  $M$  e di quella distribuita sul braccio



$$\begin{aligned} R &= 2,2 \text{ m} \\ L &= 2 \text{ m} \\ a &= 20 \text{ mm} \\ b &= 40 \text{ mm} \\ \omega &= 75 \text{ giri/minuto} \\ M &= 300 \text{ kg} \\ \rho &= 7860 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$\text{Massa concentrata} \quad F_M = M \omega^2 R = 300 \left( \frac{2\pi \cdot 75}{60} \right)^2 2.2 = 40712 \text{ N}$$

$$\text{Massa distribuita} \quad dF_d = dm \omega^2 r = \rho ab \omega^2 x dx$$

$$F_d = \int_0^L \rho ab \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho ab \omega^2 L^2 = 776 \text{ N}$$

Chiaramente la sollecitazione risulta massima all'attaccatura dell'asse ( $x=0$ ) e vale

$$F = F_M + F_d = 40712 + 776 = 41488 \text{ N}$$

Nella sezione più sollecitata risulterà una tensione pari a

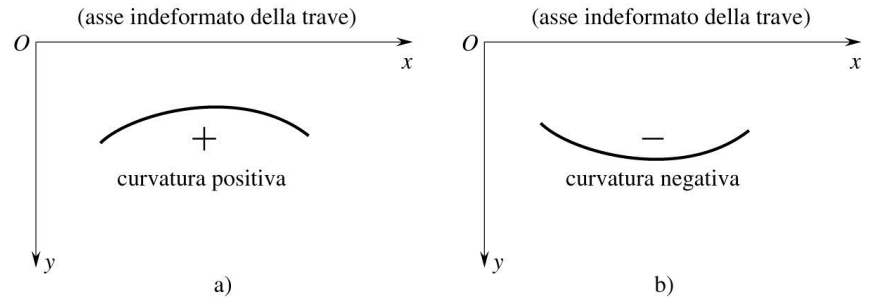
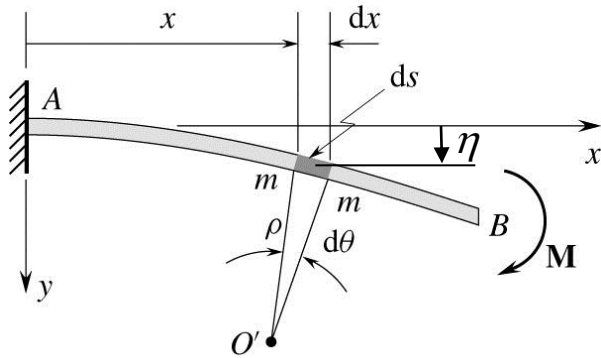
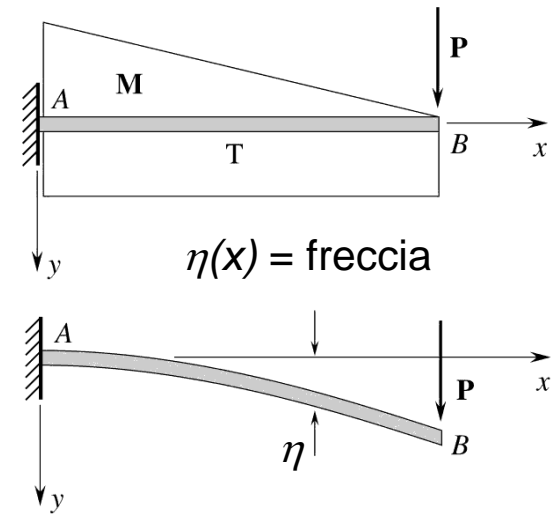
$$\sigma = \frac{F}{ab} = 51.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

# Sollecitazione di Flessione

Il piano di inflessione è quello che contiene la deformata di tutti i punti nel piano xy (piano xy stesso)

Per il momento ci si limita al caso di flessione che si sviluppa nel piano xy di travi prismatiche e simmetriche rispetto al piano xy

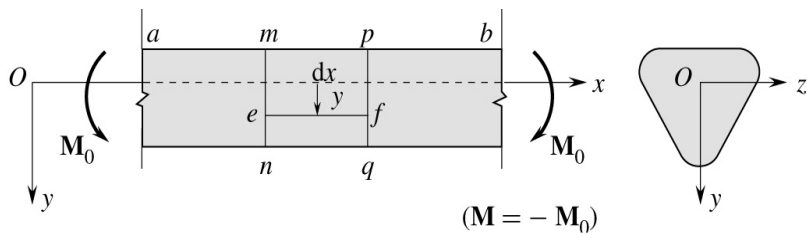
Per effetto della sollecitazione la trave si incurva in modo da opporsi al momento di sollecitazione (trave a sbalzo – massima curvatura all'incastro)



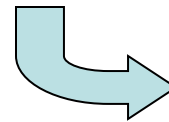
La curvatura della linea d'asse (congiungente di tutti i baricentri) varia lungo l'asse stesso, per un elementino di lunghezza  $dx$ :

$$\rho d\vartheta = ds \quad \Gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{ds} \approx \frac{d\vartheta}{dx}$$

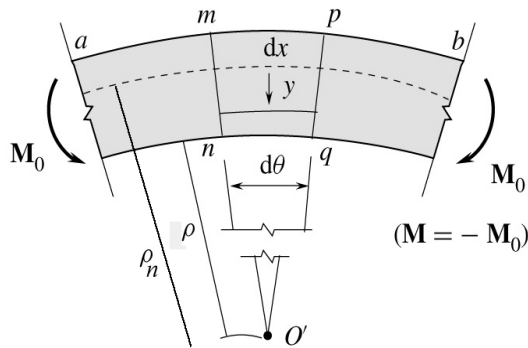
x e s si confondono nell'ambito di spostamenti al I ordine



L'ipotesi base è che sezioni piane, ortogonali alla linea d'asse, anche dopo deformazione rimangano piane e ortogonali



Angolo  $\theta$  rispettato da tutte le fibre longitudinali



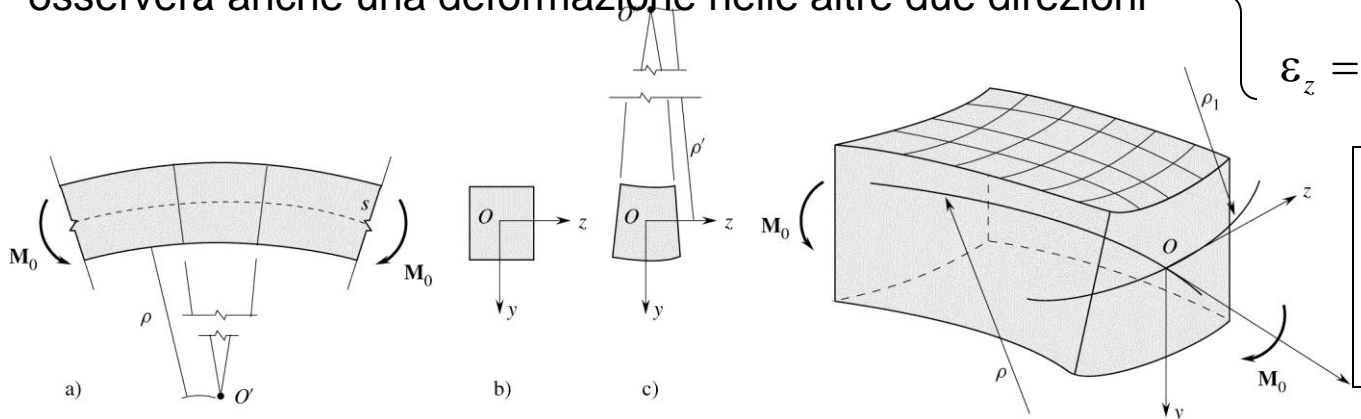
Le fibre superiori si allungano, quelle inferiori si accorciano – Esisterà una posizione ( $y=0$ ) alla quali la lunghezza non varia: **asse neutro**

$$d\vartheta = \cos t = \frac{(1 + \varepsilon_x) dx}{\rho_n - y} = \frac{dx}{\rho_n} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho_n}$$

La sollecitazione è quindi assiale, in quanto alcune fibre (estradosso) si allungheranno, le altre (intradosso) si accorceranno.

Dato che la sollecitazione è monodimensionale ( $\sigma_x$ ) si osserverà anche una deformazione nelle altre due direzioni

$$\begin{cases} \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = \nu \frac{y}{\rho_n} \\ \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = \nu \frac{y}{\rho_n} \end{cases}$$



*Curvatura secondaria*

$$\rho_y = \rho_z = \frac{\rho}{\nu}$$

L'inversione delle equazioni di Navier consente di determinare la sollecitazione che risulta monodimensionale

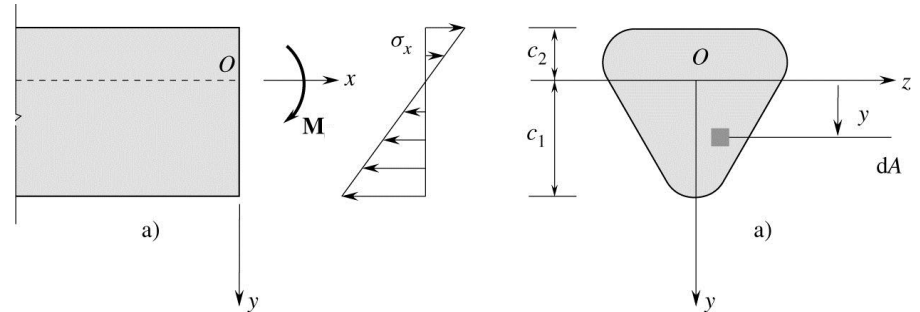
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\left( \epsilon_x \ ; \ \epsilon_y = -\nu \epsilon_x \ ; \ \epsilon_z = -\nu \epsilon_x \right) \Rightarrow \left( \sigma_x = E \epsilon_x = -E \frac{y}{\rho_n} \ ; \ \sigma_y = 0 \ ; \ \sigma_z = 0 \right)$$

Per il calcolo delle sollecitazioni che si creano per effetto del momento applicato, si hanno a disposizione le due equazioni di equilibrio, trasversale e dei momenti

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad ; \quad \int_A y \cdot \sigma_x dA = M$$

Dalla I:  $-\frac{E}{\rho_n} \int_A y dA = 0 \Rightarrow \int_A y dA = 0$



*Il momento statico della sezione rispetto al piano neutro è nullo – l'asse neutro (traccia piano neutro su piano di simmetria) è baricentrico*

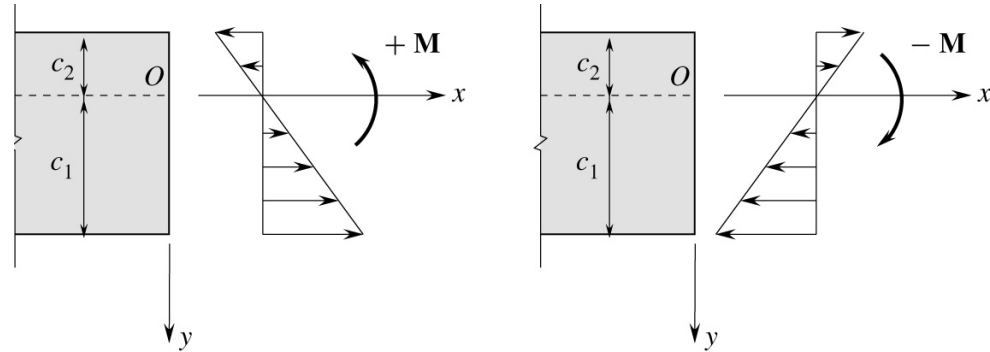
*Per la simmetria su y il piano neutro è piano principale d'inerzia*

*Se l'asse di sollecitazione è quello di simmetria (y) l'asse baricentrico  $\Xi$  asse neutro*



Dalla II: 
$$M = \int_A y \cdot \sigma_x dA = -\frac{E}{\rho_n} \int_A y^2 dA = -\frac{E}{\rho_n} J_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma = \frac{1}{\rho_n} = -\frac{M}{E J_z}} \quad \star$$

*Il segno negativo sta ad indicare che, per la convenzione dei segni adottata, la curvatura positiva si ottiene applicando un momento negativo e viceversa*



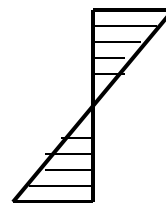
Ricordando la definizione di freccia prima considerata, risulta anche:

$$\vartheta(x) \approx \tan(\vartheta) = \frac{d\eta(x)}{dx} \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{d^2\eta/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{d^2\eta}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E J_z}}$$

*Questa ultima equazione è detta **Equazione della linea elastica** – integrandola si può determinare l'andamento dell'inflexione noto che sia il momento applicato sulla trave*

Combinando le due equazioni  $\star$  si ottiene lo stato di sollecitazione che risulta variabile linearmente (farfalla)

$$\boxed{\sigma(y) = \frac{M y}{J_z}}$$



*Per una sezione simmetrica e bilanciata rispetto baricentro*

La variazione di inclinazione, per una lunghezza  $dx$  è:

$$\frac{d}{dx}(\vartheta) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dx}{\rho_n} \right) = \frac{1}{\rho_n}$$

*Pertanto, il lavoro elastico di deformazione risulta*

$$dW = \frac{1}{2} M d\vartheta = \frac{1}{2} M \frac{dx}{\rho_n}$$

*Che, integrato su tutta la lunghezza  $l$  da:*

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l M \frac{dx}{\rho_n} = \frac{1}{2} \int_0^l M \frac{M}{E J_z} dx = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{E J_z}$$

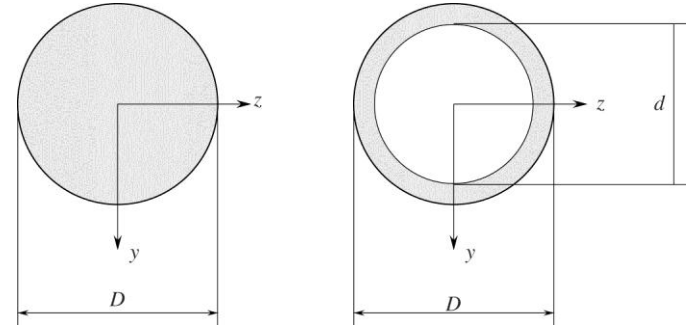
### Esempio 1: sezione circolare piena e cava

*Piena:*

$$J_z = \frac{\pi}{64} D^4$$

*Cava:*

$$J_z = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$



*Il massimo valore si ha in corrispondenza del raggio massimo*

$$\sigma_{x,D} = \frac{M}{J_z} \frac{D}{2} = \frac{32M}{\pi D^3}$$

$$\sigma_{x,D} = \frac{M}{J_z} \frac{D}{2} = \frac{32M D}{\pi (D^4 - d^4)}$$

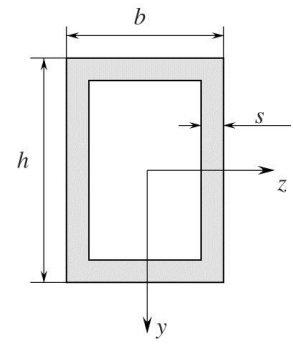
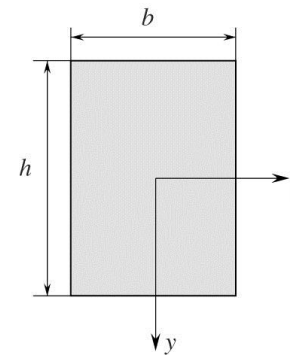
## Esempio 2: sezione rettangolare piena e cava

Piena:

$$J_z = \frac{1}{12} b h^3$$

Cava:

$$J_z = \frac{1}{12} \left[ b h^3 - (b - 2s)(h - 2s)^3 \right]$$



Il massimo valore si ha in corrispondenza del raggio massimo

$$\sigma_{x,D} = \frac{M}{J_z} \frac{h}{2} = \frac{6M}{b h^2}$$

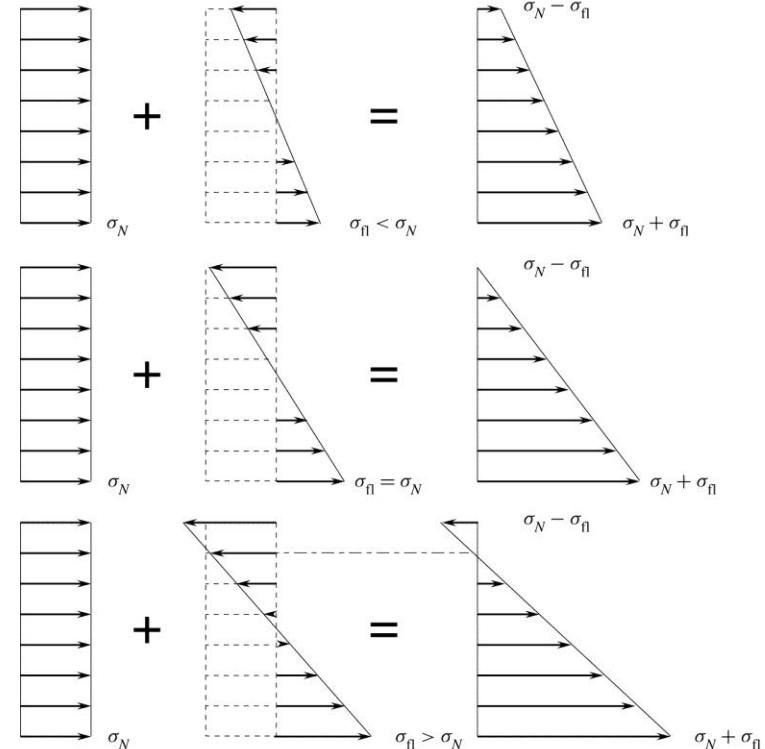
$$\sigma_{x,D} = \frac{M}{J_z} \frac{h}{2} = \frac{6M h}{\pi \left[ b h^3 - (b - 2s)(h - 2s)^3 \right]}$$

## Combinazione di sollecitazione Normale e di Flessione

Entrambe danno sollecitazione solo assiale, l'una costante nella sezione, l'altra variabile linearmente

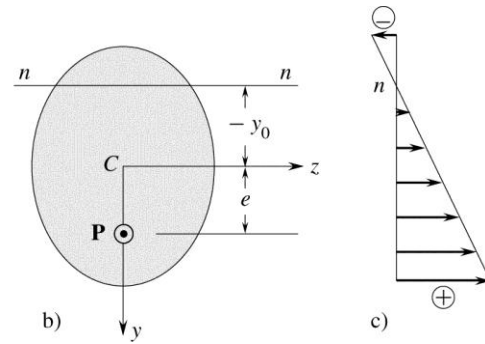
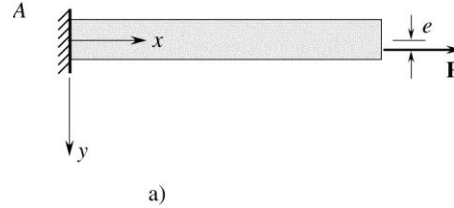
$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M y}{J}$$

*Questa combinazione viene ad esempio utilizzata nei cemento armato precompresso*

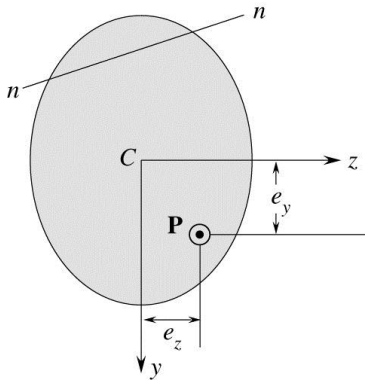


Se il carico  $P$  è applicato in posizione eccentrica e rispetto al baricentro

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{J_z}$$



Il piano neutro si sposterà e si può ricavare imponendo l'annullarsi delle  $\sigma$   $y_0 = -\frac{J_z}{A e}$



Nel caso ancor più generale di spostamento del carico secondo due direzioni, l'asse neutro non è più normale all'asse di sollecitazione né è parallelo agli assi principali di inerzia

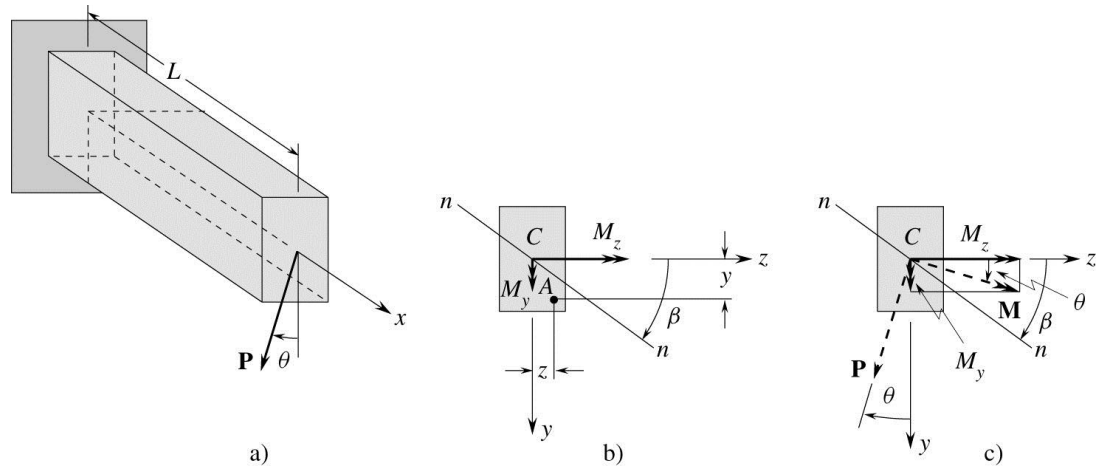
$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{J_y} + \frac{Pe_y y}{J_z}$$

L'asse  $n-n$  si ricava dall'equazione della retta che si ottiene annullando la  $\sigma$ :

$$y = -\frac{J_z e_z}{J_y e_y} z - \frac{J_z}{A e_y}$$

## Flessione Deviata

Si realizza tale condizione quando il momento flettente applicato non risulta allineato con uno dei piani principali di inerzia



*Il momento flettente si scompone nelle due componenti rispetto alle direzioni principali di inerzia*

*Lo stress assiale indotto è:*

$$\sigma_x = \frac{P(L-x)\sin\vartheta}{J_y} z - \frac{P(L-x)\cos\vartheta}{J_z} y$$

$$y = \left( \frac{J_z}{J_y} \tan\vartheta \right) z$$

*Si cerca asse neutro annullandolo*

Pertanto l'asse neutro risulta in generale non ortogonale con il piano di inflessione ma inclinato rispetto ad esso secondo la legge

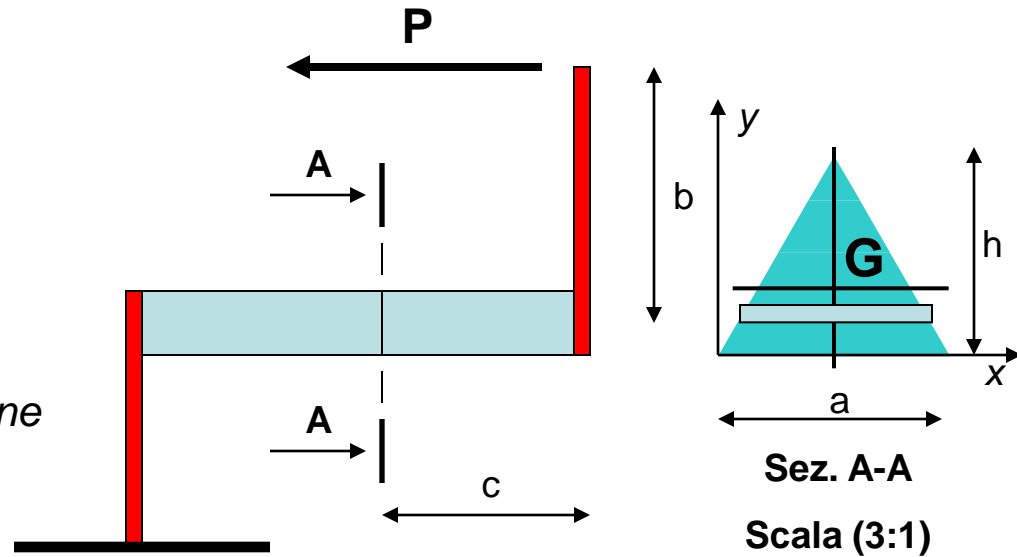
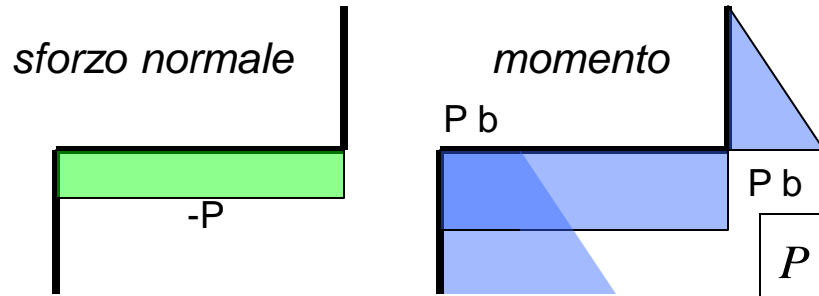
$$\tan\beta = \frac{J_z}{J_y} \tan\vartheta$$

*Se la sezione è tale da avere  $J_z = J_y$  (quadrata, circolare,...) permane l'ortogonalità tra piano di inflessione e asse neutro*

# Esempio 1: Calcolo di sollecitazione

Calcolare la massima sollecitazione che si ha in corrispondenza della sezione A-A

Innanzitutto si determina l'andamento dello sforzo normale e del momento in ogni sezione



$$P = 2000 \text{ N} ; a = 25 \text{ mm} ; b = 70 \text{ mm} ; h = 18 \text{ mm}$$

Proprietà della sezione:

$$A = \frac{1}{2} ah = 225 \text{ mm}^2 \quad y_G = \frac{1}{3} h = 6 \text{ mm} \quad J_{y=0} = \iint_A y^2 dA$$

$$J_{y=0} = \int_0^h y^2 a \frac{h-y}{h} dy \quad J_{y=0} = \frac{ah^3}{3} - \frac{ah^3}{4} = \frac{ah^3}{12}$$

$$J_G = \frac{ah^3}{12} - A y_G^2 = 4050 \text{ mm}^4$$

Sollecitazioni top / bottom

$$\sigma_{y=h} = -\frac{P}{A} - \frac{Pb}{J_G} \cdot \frac{2}{3} h = -423.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y=0} = -\frac{P}{A} + \frac{Pb}{J_G} \cdot \frac{1}{3} h = 198.5 \text{ MPa}$$

## Esempio 2: Posizione asse neutro

Proprietà della sezione:

$$A = bh - (b - 2s)(h - 2s) = 22400 \text{ mm}^2$$

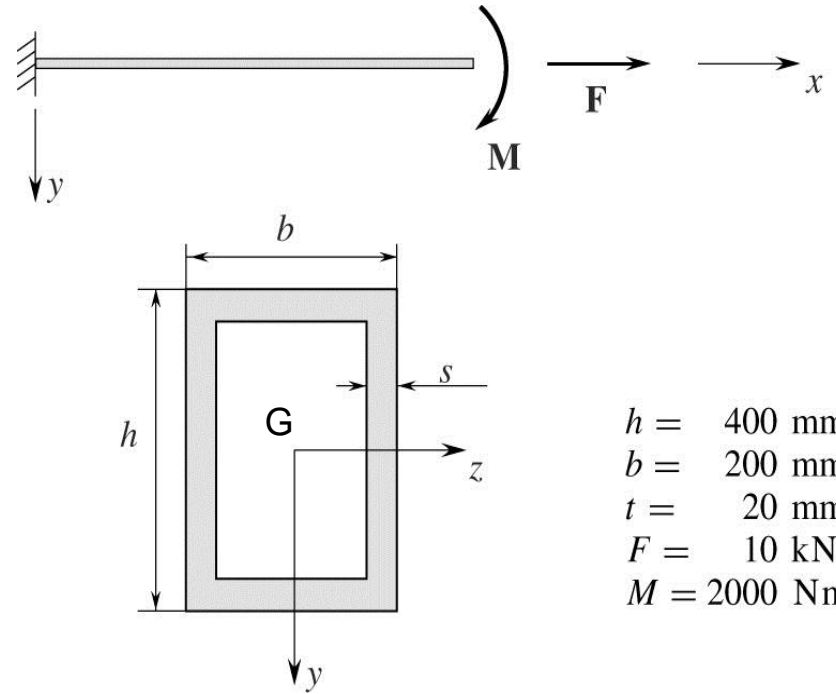
$$J_G = \frac{1}{12} \left[ bh^3 - (b - 2s)(h - 2s)^3 \right] = 444.6 \text{ mm}^4$$

Sovrapponendo gli effetti, e tenendo conto dei versi degli assi, si ha:

$$\sigma_x(y) = \frac{F}{A} - \frac{M}{J_G} y$$

Uguagliando a 0

$$y_0 = \frac{F J_G}{M A} = 99 \text{ mm}$$

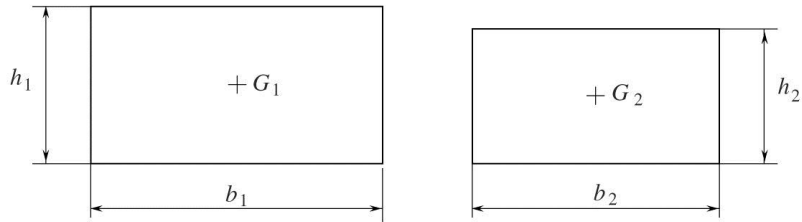
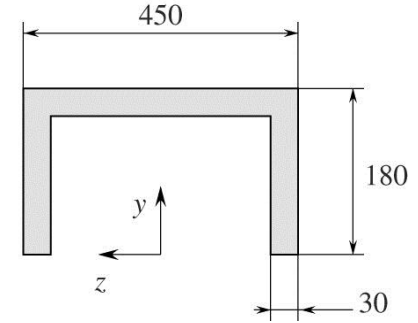
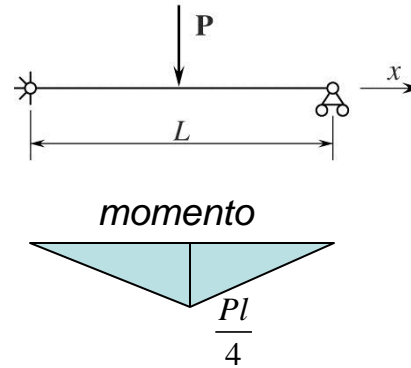


### Esempio 3: Sezione a C

Calcolare la massima sollecitazione nell'elemento a C

$$P = 30 \text{ kN}$$

$$L = 30 \text{ m}$$



La posizione del baricentro si può determinare con una media pesata sulla figura piena meno quella vuota

$$y_G = \frac{A_1 y_{G1} - A_2 y_{G2}}{A_1 - A_2} = \frac{(450 \cdot 180) \cdot 90 - (390 \cdot 150) \cdot 75}{(450 \cdot 180) - (390 \cdot 150)} = 129 \text{ mm}$$

Anche il momento di inerzia si determina algebricamente e sfruttando il teorema di trasposizione

$$J_G = \frac{1}{12} (450 \cdot 180^3 - 390 \cdot 150^3) + A_1 (129 - 90)^2 - A_2 (129 - 75)^2 = 61.63 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{bottom} = \frac{M}{J_G} \cdot y_G = \frac{Pl}{4 J_G} \cdot y_G = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 30}{4 \cdot 61.36 \cdot 10^{-6}} \cdot 0.129 = 473 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ \sigma_{top} = -\frac{M}{J_G} \cdot (h - y_G) = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 30}{4 \cdot 61.36 \cdot 10^{-6}} \cdot (0.180 - 0.129) = -186 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{array} \right.$$