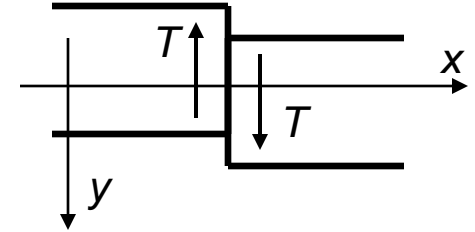


Sollecitazione di Taglio

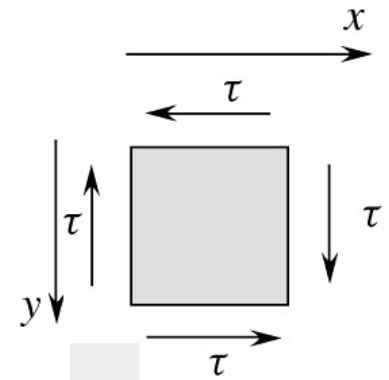
In linea teorica si può avere solo sollecitazione di taglio, ma in realtà essa si accompagna sempre a momento flettente



Ciononostante, anche in presenza di taglio il momento flettente si calcola allo stesso modo, in quanto esso fornisce, nel riferimento assiale (x-y) tensioni normali, mentre il taglio dà tensioni tangenziali

Spesso, in I approssimazione, si considera il taglio uniformemente distribuito sulla sezione resistente

$$\tau = \frac{T}{A}$$



Il calcolo della tensione di taglio su una sezione è in realtà assai più complesso, esso varia sia secondo x che y (in forma parabolica per una sezione rettangolare)

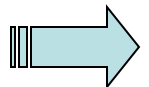
In modo più esatto, ma sempre approssimato (**Jourawsky**), esso viene mediato lungo la direzione dello spessore (z) con la formula

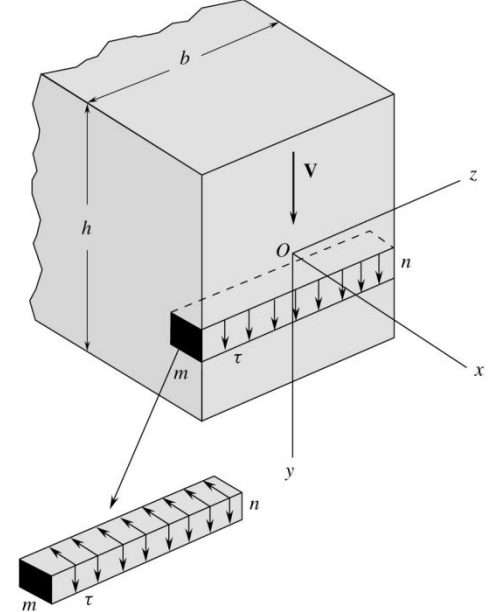
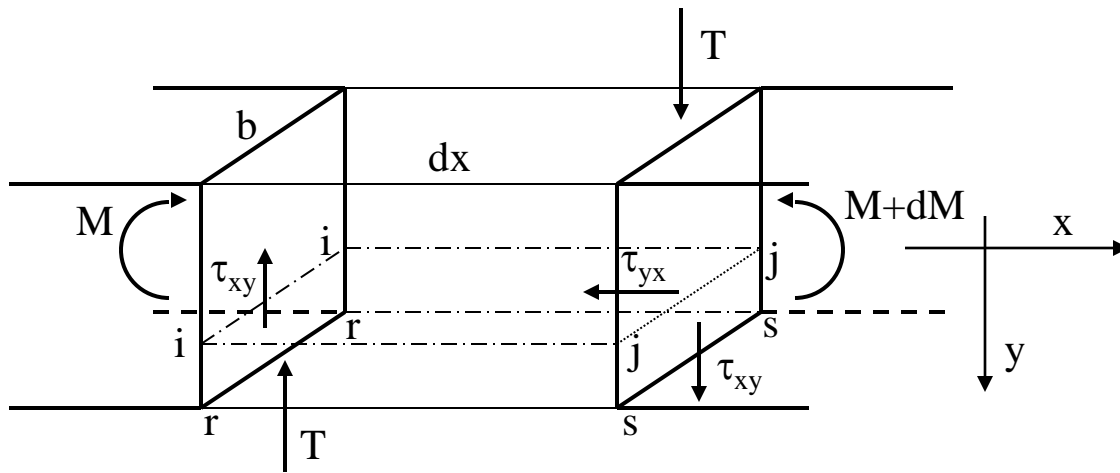
$$\tau = \frac{T S}{J b}$$

La formula fornisce le seguenti soluzioni elementari

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sezione rettangolare: } \tau_{\max} = \frac{3 T}{2 A} \\ \text{Sezione circolare: } \tau_{\max} = \frac{4 T}{3 A} \end{array} \right.$$

dimostrazione





Si considera di isolare un elementino assiale (lunghezza dx)

Si consideri l'equilibrio del parallelepipedo $ii - rr - ss - jj$ in direzione x

Su di esso agiscono le tensioni normali σ_x (dovute al momento su $ii-rr$ e $jj-ss$) ed il taglio τ_{yx} sulla faccia $ii-jj$.

- ⇒ Faccia sinistra (in x) agisce momento M - tensione massima σ
- ⇒ Faccia destra (in $x+dx$) agisce momento $M+dM$ - tensione massima σ_1

$$\int_{A(ii-jj)} (\sigma_1 - \sigma) dA - \tau_{yx} b_i dx = 0$$

Ricordando che

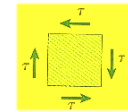
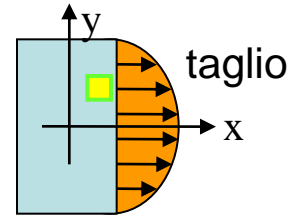
$$\sigma_1 - \sigma = \frac{M + dM}{J} y - \frac{M}{J} y = \frac{dM}{J} y = \frac{T dx}{J} y$$

Si ha

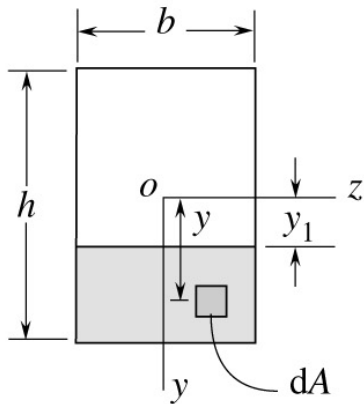
$$\frac{T dx}{J} \int_{A(ii-jj)} y dA = \tau_{yx} b_i dx \quad \Rightarrow \quad \tau_{yx} = \frac{T}{J b_i} \int_{A(ii-jj)} y dA = \left(\frac{T S_i}{J b_i} \right) \quad \text{c.d.d.}$$

Nella precedente S_i è il momento statico della ii-rr rispetto all'asse neutro, J è invece il momento d'inerzia dell'intera sezione

Pertanto, il taglio presenta, lungo y , un andamento dominato dal momento statico – esso si annulla al top/bottom e risulta massimo nella sezione baricentrica



Nel caso di sezione rettangolare, ad esempio, il momento statico si può calcolare come area della parte sottesa alla corda ii per la distanza del suo baricentro dall'asse neutro



$$S(y_1) = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

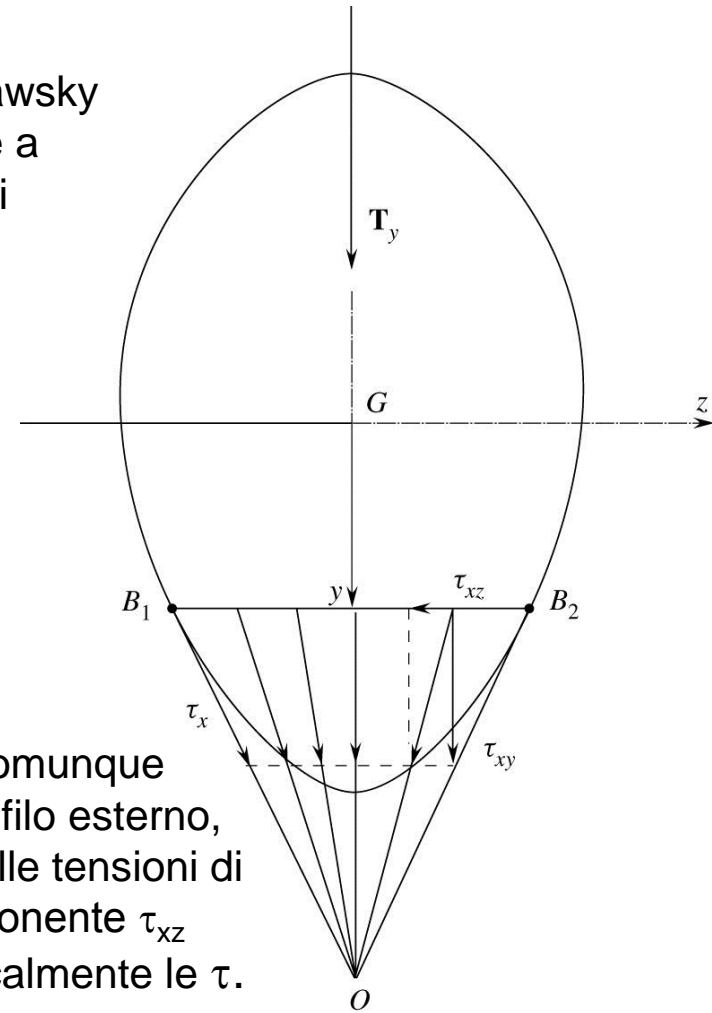
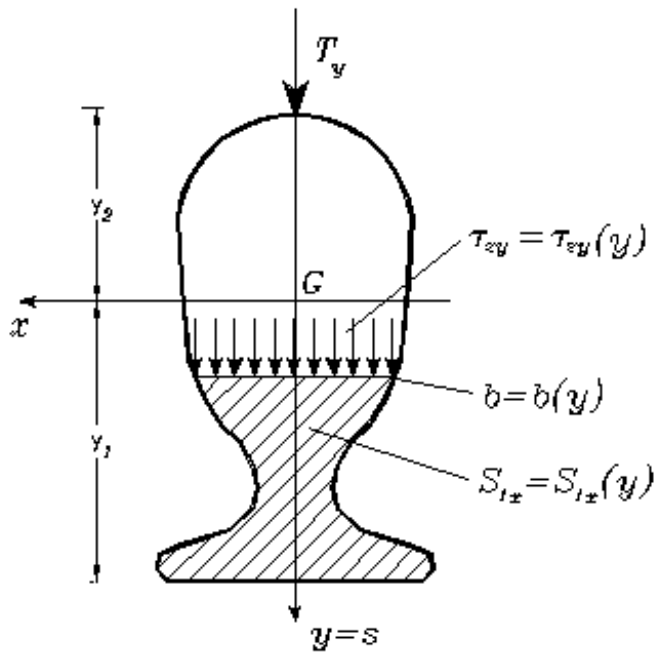


$$\tau_{yx}(y) = \frac{T}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

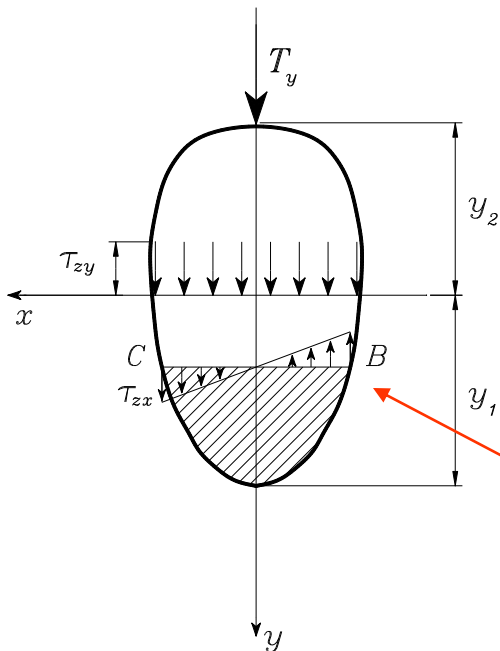
Il valore massimo ($y=0$)

$$\tau_{yx}(y) = \frac{Th^2}{8J} = \frac{3T}{2A}$$

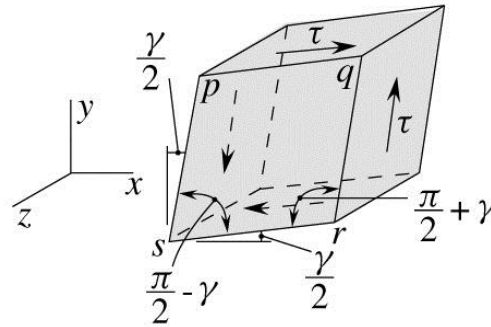
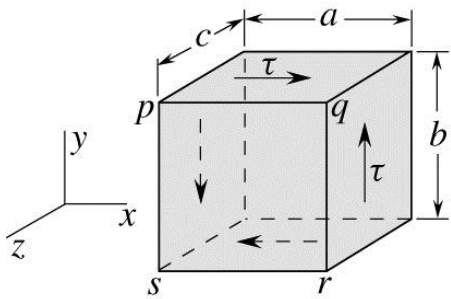
La formula di Jourawsky è applicabile anche a sezioni non regolari



Il tensore delle tensioni dovrà comunque risultare sempre tangente al profilo esterno, pertanto, occorre sovrapporre alle tensioni di taglio di Jourawsky un'altra componente τ_{xz} (antisimmetrica) che riorienta localmente le τ .

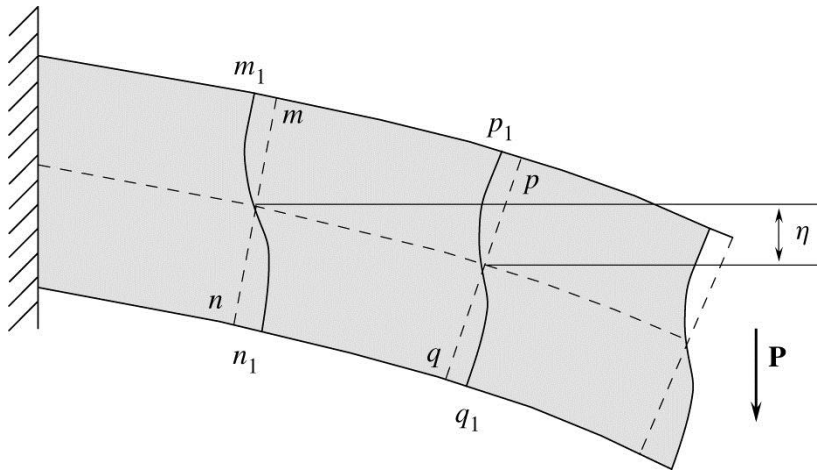


Tensioni ribaltate



Lo sforzo di taglio induce l'elemento a variare di forma (ma non di volume) secondo un angolo di scorrimento γ

Dato che esiste il semplice legame $\gamma = \tau / G$ tra scorrimento quest'ultimo sarà massimo al centro e nullo al top / bottom



Le sezioni, inizialmente ortogonali all'asse, si ingobbano

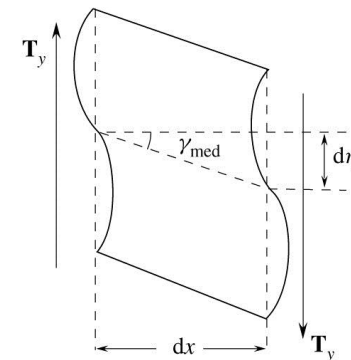
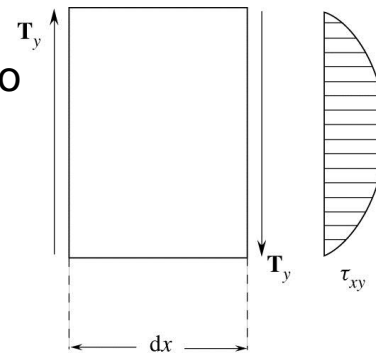
Tuttavia, lo scorrimento è uguale per ogni fibra assiale, per cui non si instaurano (per sezioni costanti) sollecitazioni o deformazioni assiali (taglio puro senza flessione)

Lo spostamento tra due sezioni può essere valutato mediante la deformazione (scorrimento) media

$$d\eta = \gamma_{media} dx$$

$$\gamma_{media} = \chi \frac{T}{GA}$$

Fattore di taglio



Sezione	χ
 Rettangolare	$\frac{6}{5}$
 Circolare	$\frac{10}{9}$
 Circolare cava sottile	2
  a I o scatolata	$\frac{A}{A_{\text{anima}}}$

Il lavoro di deformazione, in accordo al teorema di Clapeyron, è pari all'integrale, lungo la linea, della metà della tensione di taglio per lo scorrimento medio

$$W = \frac{1}{2} \int_L \frac{T^2 \chi}{GA} dx \quad \text{od anche} \quad W = \int_L dW = \int_L \int_A \frac{T^2 S_i^2}{J^2 b_i^2} \frac{1}{2G} dA dx$$

$$\tau = \frac{T S_i}{J b_i}$$

$$W = \int_L dW = \int_L \int_A \frac{T^2 S_i^2}{J^2 b_i^2} \frac{1}{2G} dA dx = \frac{1}{2} \int_L \frac{T^2}{G} \int_A \frac{S_i^2}{b_i^2 J^2} dA \cdot \frac{A}{A} dx$$

$$\chi = \int_A \frac{A S_i^2}{J^2 b_i^2} dA$$

Il fattore di taglio può essere calcolato analiticamente

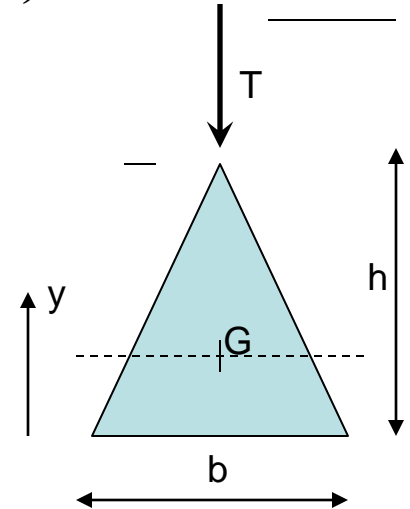
Esempio: andamento del taglio in una sezione triangolare

$$\tau(y)_{y>0} = \frac{T S_i}{J b_i} \quad S(y)_{y>0} = \left(b \frac{h-y}{h} \frac{h-y}{2} \right) \cdot \left(y - \frac{h}{3} + \frac{h-y}{3} \right)$$

$$S(y)_{y>0} = \left(b \frac{h-y}{h} \frac{h-y}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} y = \frac{b(h-y)^2 y}{3h}$$

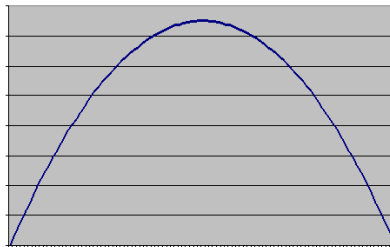
$$b(y)_{y>0} = b \frac{h-y}{h}$$

$$J_G = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \cdot \frac{h^2}{9} = \frac{1}{36} bh^3$$



$$\tau(y)_{y>0} = T \frac{b(h-y)^2 y}{3h} \frac{1}{\frac{1}{36} bh^3 b \frac{h-y}{h}}$$

$$\tau(y)_{y>0} = 12 \frac{T(h-y)y}{bh^3}$$



Il massimo del taglio si ha quando
 $y = h/2$

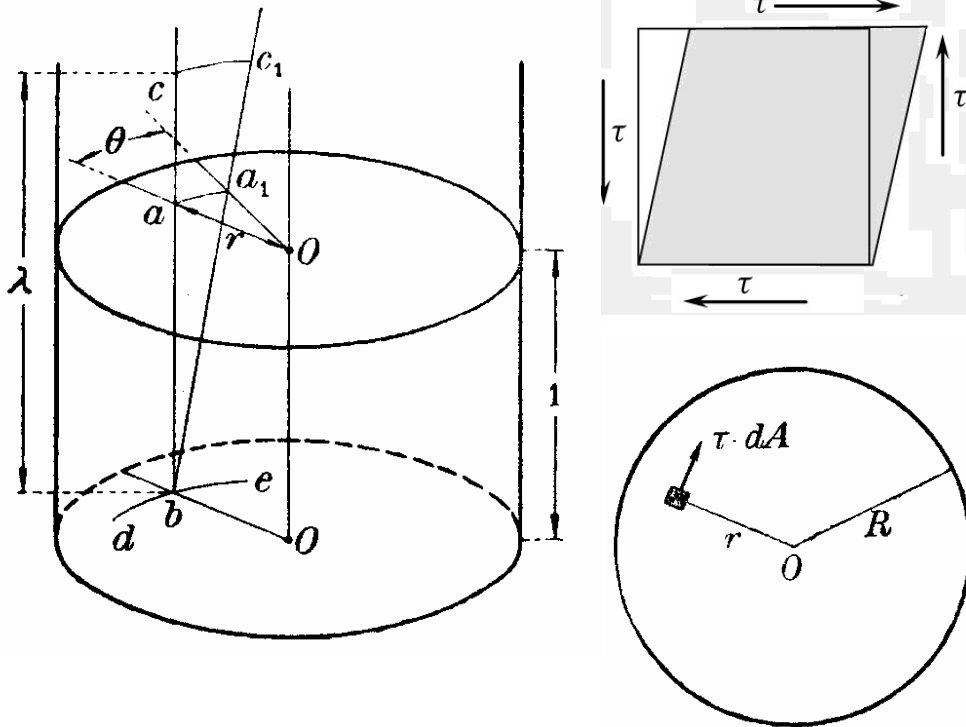
$$\tau(y)_{y=h/2} = 3 \frac{T}{bh}$$

Sollecitazione di Torsione

È una sollecitazione che si verifica molto frequentemente, ad es. negli organi che trasmettono potenza (assi e alberi), viti, albero di sterzo, ...

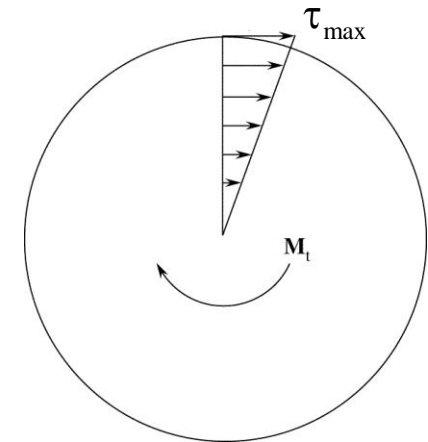
La soluzione si presenta semplice solo nel caso di sezioni circolari (del resto assai diffuse nella tecnica)

Ipotesi: {
 Sezioni piane restano tali ma ruotano
 Lo stato di tensione è piano



Lo scorrimento è $\gamma = \frac{\overline{CC_1}}{\lambda}$

$$\tau = G \gamma$$



Perché tutti i punti di una sezione ruotino del medesimo angolo, scorrimento e taglio debbono crescere linearmente

L'equilibrio a torsione sull'intera sezione dà:
$$M_t = \int_A \tau r dA = \int_A \tau_{\max} \frac{r^2}{R} dA = \frac{\tau_{\max}}{R} J_p$$

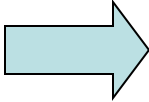
Grandezze locali nella sezione:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t R}{J_p} \quad ; \quad \tau(r) = \frac{M_t r}{J_p} \quad ; \quad \gamma(r) = \frac{M_t r}{G J_p} \quad ; \quad \vartheta = \frac{\gamma(r)}{r} = \frac{M_t}{G J_p}$$

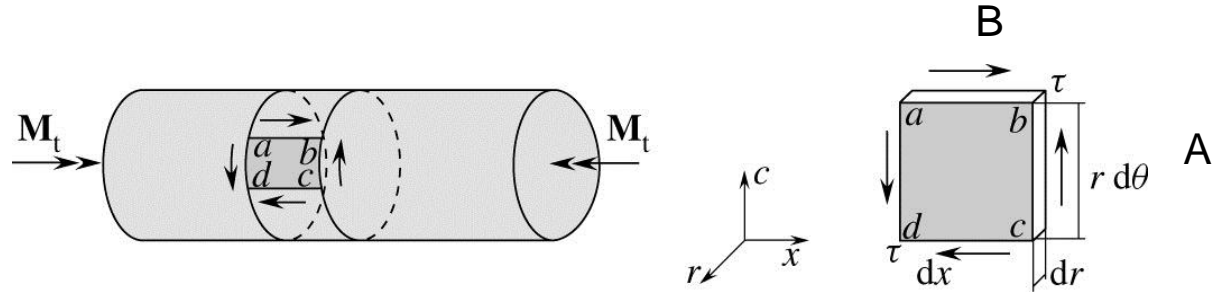
*Angolo di torsione unitario
N.B. Non dipende da r*

Globalmente si possono considerare l'angolo di torsione globale e il lavoro di torsione

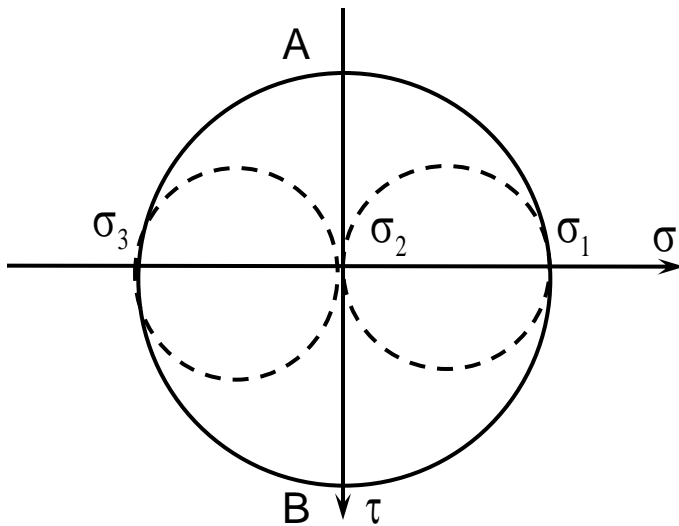
$$\Theta = \frac{\gamma_{\max} L}{R} = \frac{M_t L}{G J_p} \quad ; \quad W = \frac{1}{2} M_t \Theta = \frac{M_t^2 L}{2 G J_p}$$

Ricordando infine che $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$  $\tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$

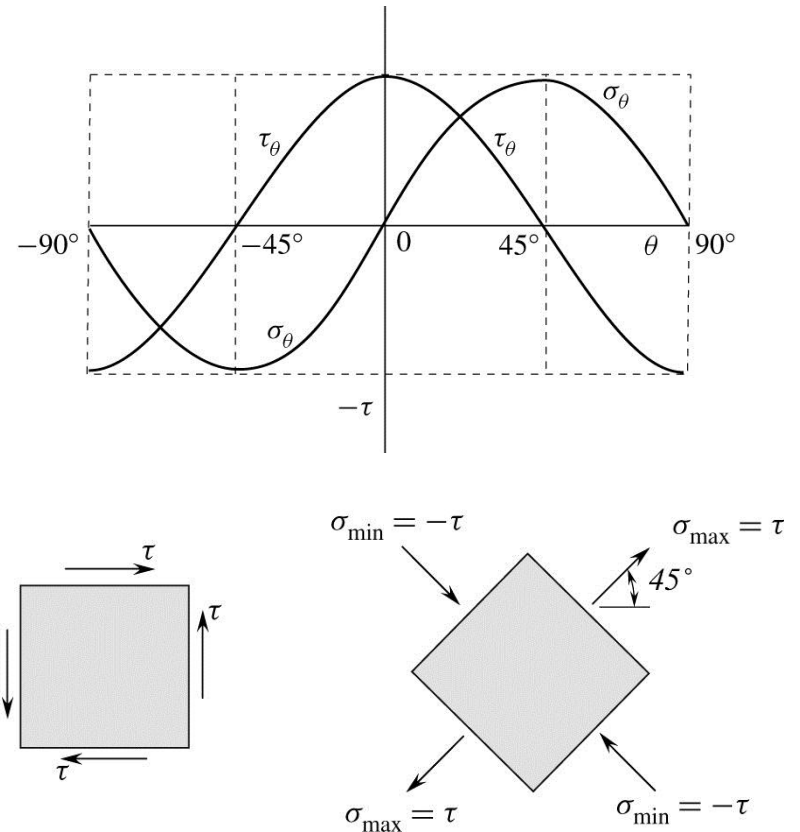
Lo stato di tensione indotto dalla torsione, nel riferimento assiale si compone di sole τ



Nel piano di Mohr si trovano i punti caratteristici (A-B) che corrispondono all'assenza di sollecitazioni normali

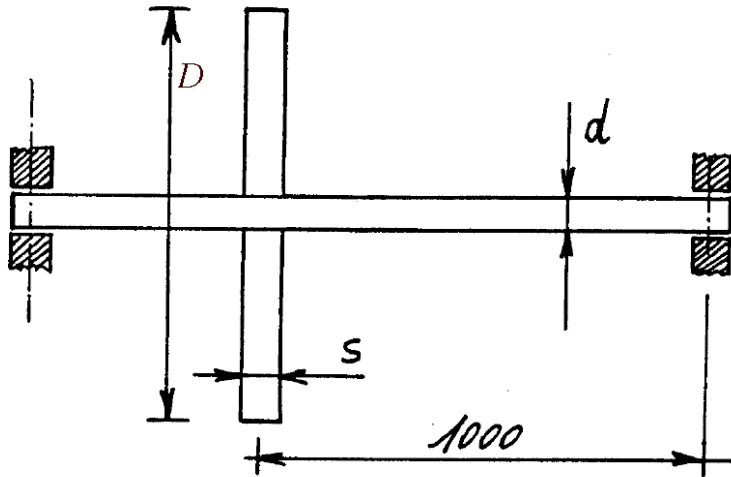


Ruotando di 45° (90°) nel piano di Mohr, si trova l'orientazione che annulla le τ



Esempio 1: Grippaggio

In un albero in acciaio di diametro $d = 80$ mm è fissata una massa volante, anch'essa in acciaio, con diametro $D = 800$ mm e spessore $s = 50$ mm. Mentre l'albero ruota a 60 giri/m, si determina un grippaggio al cuscinetto destro. Calcolare la sollecitazione conseguente.



Massa ed inerzia polare del volante risultano:

$$m = \rho s \frac{\pi}{4} D^2 = 7800 \cdot 0.05 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.8^2 = 196 \text{ kg}$$

$$I = \frac{1}{2} m \left(\frac{D}{2} \right)^2 = 15.68 \text{ kg m}^2$$

Trascurando la massa dell'albero, tutta l'energia cinetica si trasforma in energia elastica immagazzinata nella torsione, una volta grippato il cuscinetto

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = 0.5 \cdot 15.68 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 60}{60} \right)^2 = 309.6 \text{ J}$$

Il lavoro di deformazione invece vale

$$W_{tors} = \frac{1}{2} \frac{M_{tors}^2}{G J_p} L$$

$$\text{con } \begin{cases} G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 1.3} = 8.077 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \\ J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = 4.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{cases}$$

Imponendo l'uguaglianza delle due energie: $\frac{1}{2} \frac{M_{tors}^2}{G J_p} L = \frac{1}{2} I \omega^2$

$$M_{tors} = \omega \sqrt{\frac{G I J_p}{L}} = \left(\frac{2\pi \cdot 60}{60} \right) \sqrt{\frac{8.077 \cdot 10^{10} \cdot 15.68 \cdot 4.02 \cdot 10^{-6}}{1}} = 14177 \text{ Nm}$$

Di conseguenza, considerando che il momento sia applicato staticamente, ossia che non si abbiano effetti dinamici dell'albero sovrapposti

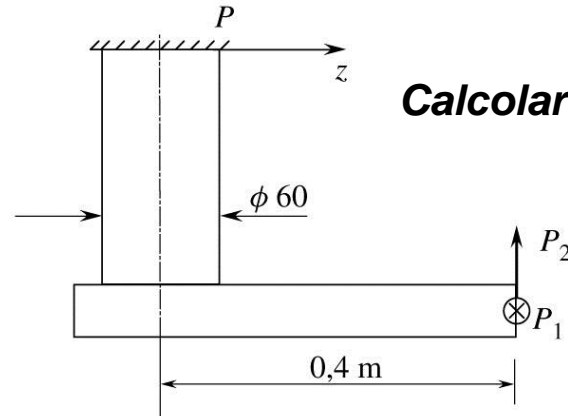
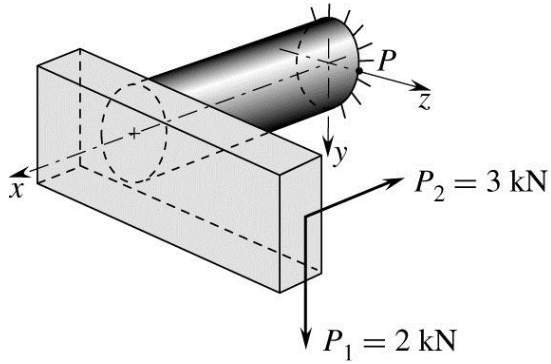
$$\tau_{\max} = \frac{16M_{tors}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 14177}{\pi \cdot 0.08^3} = 141 \text{ N/mm}^2$$

A questa sollecitazione massima, corrisponde una rotazione unitaria e totale pari a

$$\vartheta_{unit} = \frac{2 \tau_{\max}}{G \cdot d} = \frac{2 \cdot 141}{80770 \cdot 80} = 4.36 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

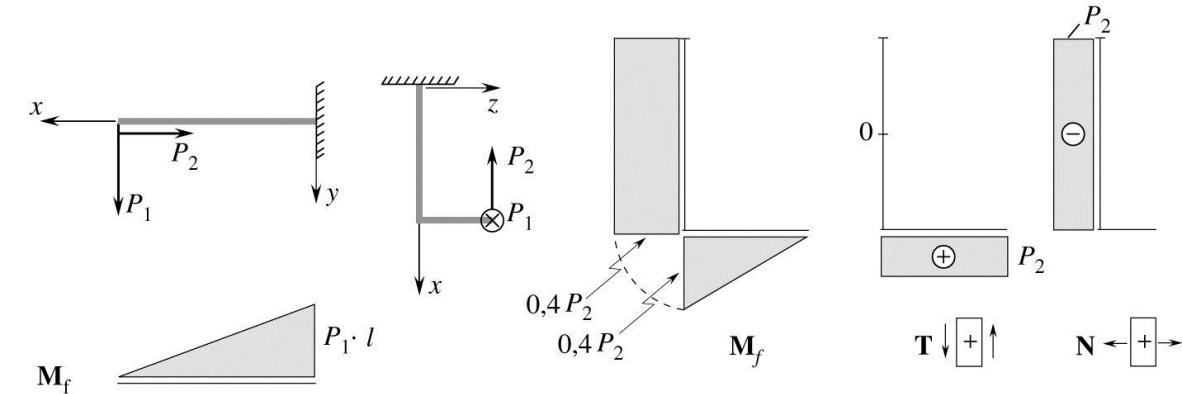
$$\Theta = \vartheta_{unit} l = 4.36 \cdot 10^{-5} \cdot 1000 = 0.044 \text{ rad} \quad (= 2.448^\circ)$$

Esempio 2: Calcolo di sollecitazione mediante sovrapposizione di effetti



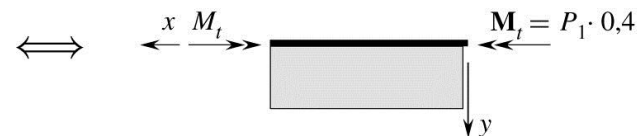
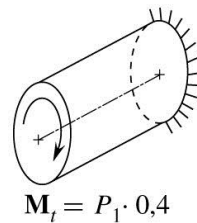
Calcolare tensore tensioni nel punto P

Azioni interne:



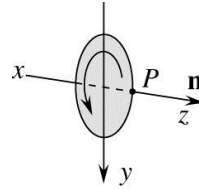
Piani Verticali

Piani Orizzontali



Si calcolano separatamente i contributi in P

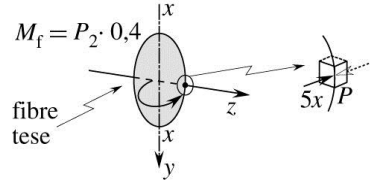
- 1) **Momento flettente dovuto a P_1**



P giace sul piano neutro e quindi

$$\sigma_{x,(1)} = 0 \text{ Mpa}$$

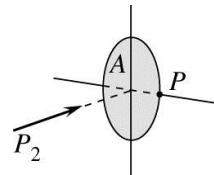
- 2) **Momento flettente dovuto a P_2**



P è sulle fibre compresse

$$\sigma_{x,(2)} = -\frac{32M_{f2}}{\pi d^3} = -\frac{32 \cdot 3000 \cdot 400}{\pi 60^3} = -56.59 \text{ MPa}$$

- 3) **Sforzo normale dovuto a P_2**



P ha la sollecitazione di tutta sezione

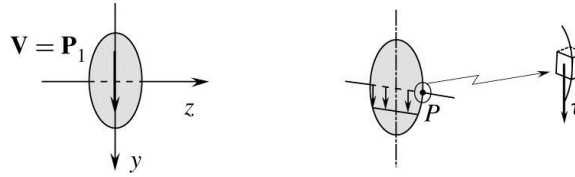
$$\sigma_{x,(3)} = -\frac{4 P_2}{\pi d^2} = -\frac{4 \cdot 3000}{\pi 60^2} = -1.06 \text{ MPa}$$

Sommando tutte le tensioni normali in P

$$\sigma_x = \sigma_{x,(1)} + \sigma_{x,(2)} + \sigma_{x,(3)} = 0 - 56.59 - 1.06 = -57.65 \text{ MPa}$$

Contributo di taglio in P

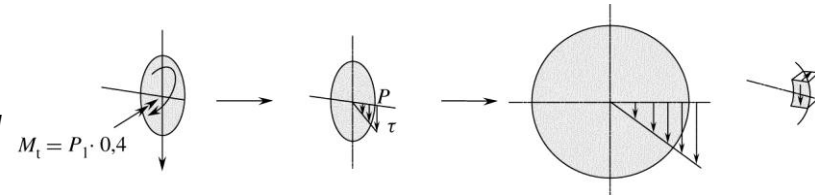
- 1) Azione tagliante dovuta a P_1



P si trova proprio dove è massimo lo sforzo tangenziale

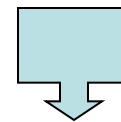
$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{4 P_1}{\pi d^2} = \frac{16 \cdot 2000}{3 \cdot \pi 60^2} = 0.94 \text{ MPa}$$

- 2) Azione del momento torcente imposto da P_1



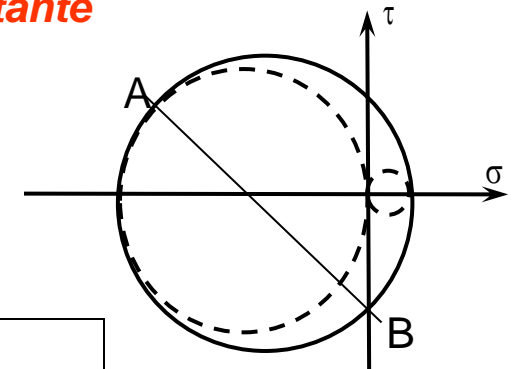
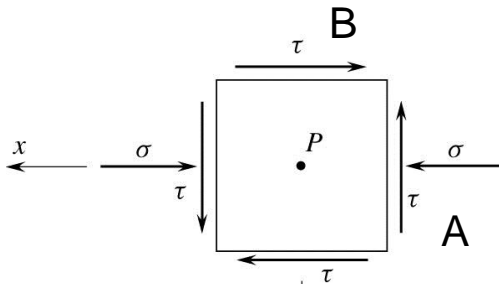
Si hanno sforzi tangenziali che sono massimi nelle fibre esterne (punto B)

$$\tau_{zy} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 2000 \cdot 400}{\pi 60^3} = 18.86 \text{ MPa}$$



Tensione risultante

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -57.65 & 0.94 & 18.86 \\ 0.94 & 0 & 0 \\ 18.86 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



$$\sigma_{eq(VonMises)} = \sqrt{57.65^2 + 3 \cdot 18.86^2 + 3 \cdot 0.94^2} = 66.28 \text{ MPa}$$

A

Per sezioni non circolari problema più complesso, risolto nel passato mediante analogie:

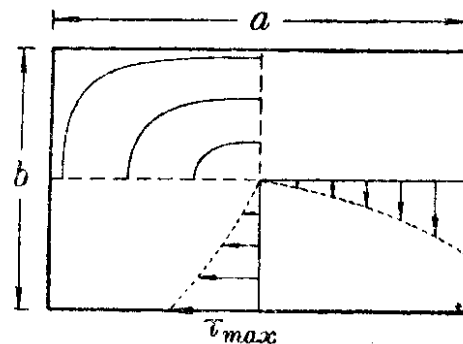
✱ Idrodinamica (Greenhill - 1871)

✱ membranale (Prandtl - 1926)

Andamento a (pseudo)-farfalla

Sezioni rettangolari

$$\tau_{MAX} = \alpha \frac{M_t}{a b^2} \quad ; \quad \Theta = \beta \frac{M_t}{G a b^3}$$



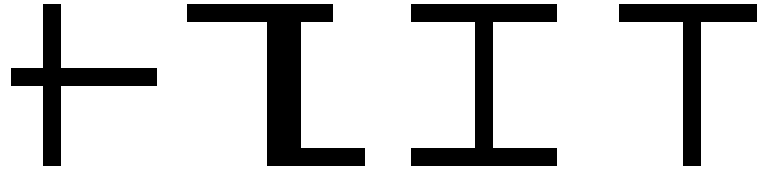
$n=a/b$	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,75	1,8
α	4,804	4,67	4,57	4,52	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,18	4,16
β	7,114	6,49	6,02	5,82	5,65	5,35	5,11	4,91	4,74	4,67	4,60

$n=a/b$	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10	20	∞
α	4,07	3,97	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00
β	4,37	4,16	4,01	3,80	3,56	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00

Rettangolari allungate: $\tau_{MAX} = 3 \frac{M_t}{a b^2} ; \Theta = 3 \frac{M_t}{G a b^3}$

Sottili semplicemente connesse:

$$J_{tors} = \frac{1}{3} \sum_i h_i s_i^3$$



$$\tau_{MAX} = \frac{M_t s_{MAX}}{J_{tors}} ; \Theta = \frac{M_t}{G J_{tors}}$$

N.B. Il massimo si ha dove lo spessore è massimo

Soluzione approssimata sezione rettangolare qualunque: ($n = b/a$)

$$\alpha = 3 + \frac{1.8}{n} ; \beta = \frac{3n}{n - 0.63}$$

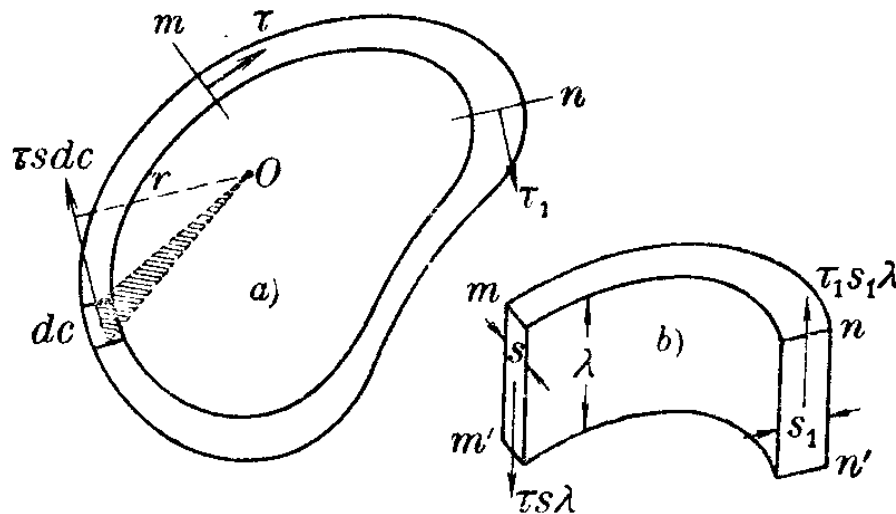
Deformabilità sezioni “raccolte” (St.Venant) ($n = b/a$)

$$q = 40 \frac{J_p}{A^4} ; \Theta = q \frac{M_t}{G J_p}$$

Formula che approssima la precedente tabella

Torsione nelle travi tubolari in parete sottile

Quando le sezioni sono sottili e chiuse, l'andamento della τ di torsione può pensarsi costante e non a farfalla su ogni possibile taglio, si utilizzano le formule di Bredt



Sezione costante:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \Omega s} \quad ; \quad \Theta = \frac{M_t c}{4 G \Omega^2 s}$$

Ω = area racchiusa sezione media

s = spessore (piccolo)

c = lunghezza linea media

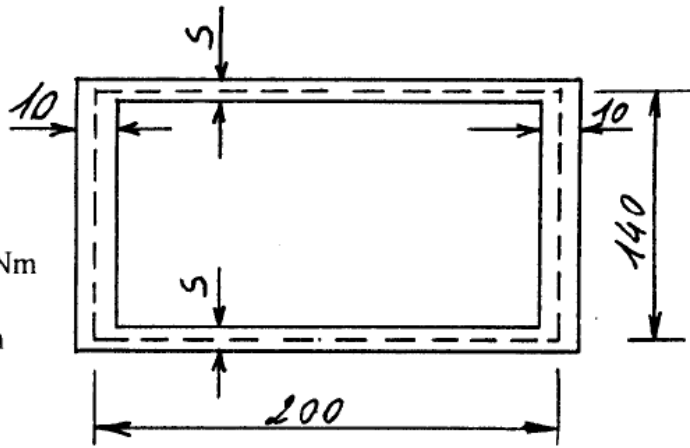
Sezione a spessore piccolo ma variabile:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_t}{2 \Omega s_{\text{MIN}}} \quad ; \quad \Theta = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \cdot \sum_i \frac{c_i}{s_i}$$

Esempio: Trave a cassone

Una trave a cassone di lunghezza L , è soggetta a momento torcente M_t . Si determini:

- 1) Lo spessore minimo dei due piatti orizzontali, sapendo che la $\sigma_{amm} = 160 \text{ MPa}$
- 2) L'angolo di torsione sapendo che una estremità è libera e l'altra incastrata



DATI

$$M_t = 25000 \text{ Nm}$$

$$L = 3000 \text{ mm}$$

In termini di τ , la sollecitazione ammissibile è

$$\tau_{amm} = \frac{160}{\sqrt{3}} = 92.4 \text{ MPa}$$

L'area sottesa dalla linea vale

$$\Omega = 200 \cdot 140 = 28000 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t}{2 \Omega s_{MIN}} \Rightarrow s_{MIN} = \frac{M_t}{2 \Omega \tau_{adm}} = \frac{25000 \cdot 10^3}{2 \cdot 28000 \cdot 92.4} = 4.8 \text{ mm}$$

Utilizzando ora la formula di Bredt per spessori non costanti si ha

$$\vartheta_{unit} = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \sum \frac{c_i}{s_i} = \frac{25000 \cdot 10^3}{4 \cdot 80770 \cdot 28000} \left(2 \cdot \frac{200}{4.8} + 2 \cdot \frac{140}{10} \right) = 1.12 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \vartheta_{Tot} = \vartheta_{unit} \cdot L = 1.12 \cdot 10^{-5} \cdot 3000 = 3.36 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$