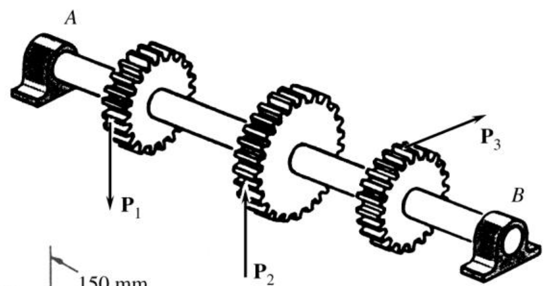
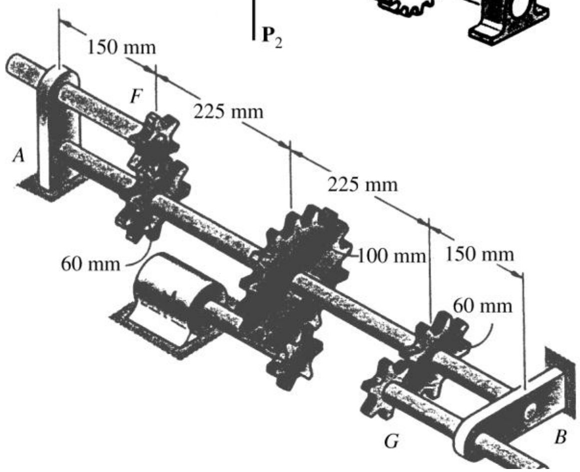
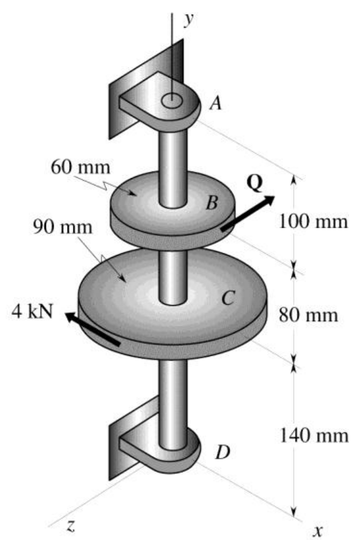
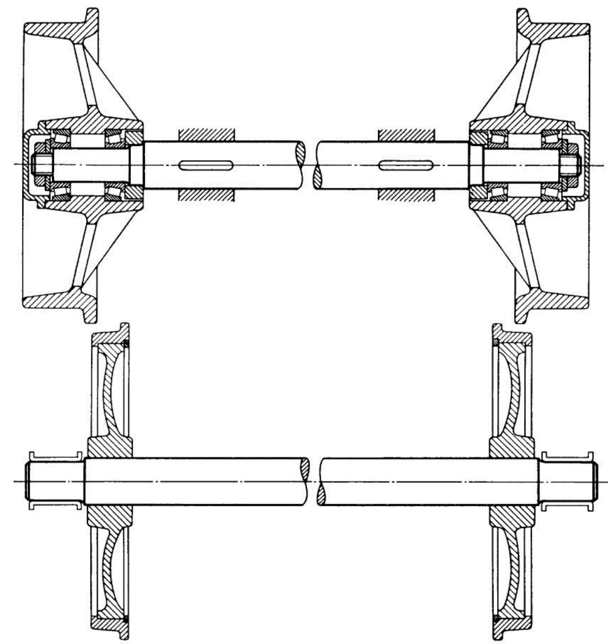
Sollecitazione di flessione - linea elastica

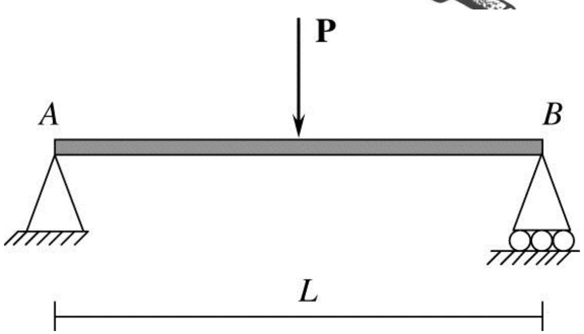
Esistono molti casi in cui, sotto carico, le frecce sono tali da pregiudicare il buon funzionamento dell’apparato (disallineamenti, vibrazioni,perdita di contatto, …) in modo ancor più vincolante di quanto derivante dall’analisi delle sollecitazioni

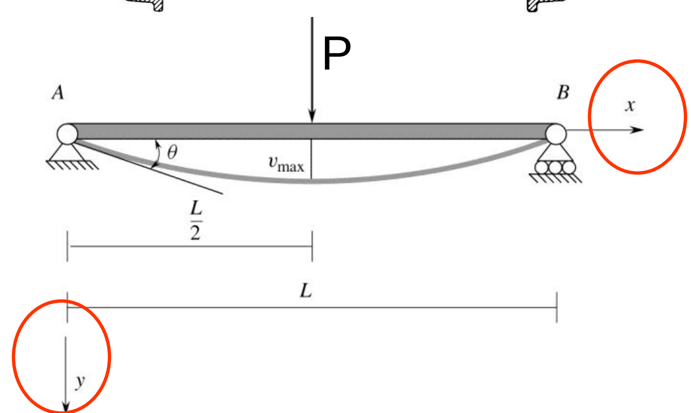




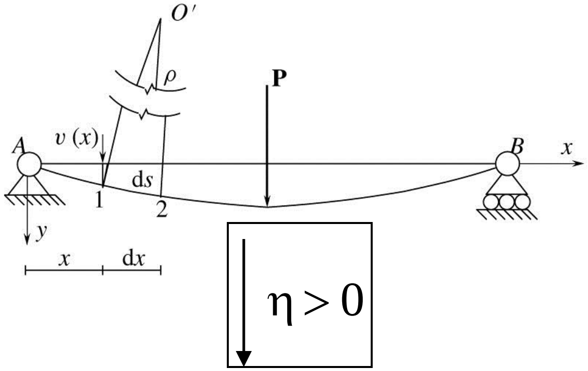


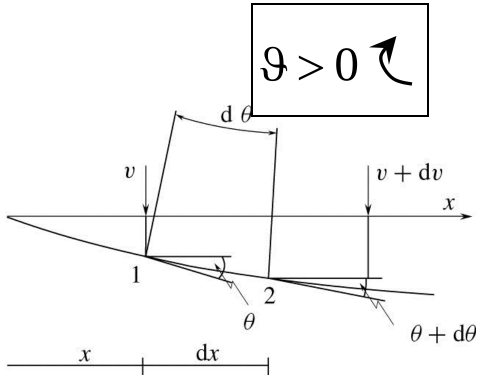


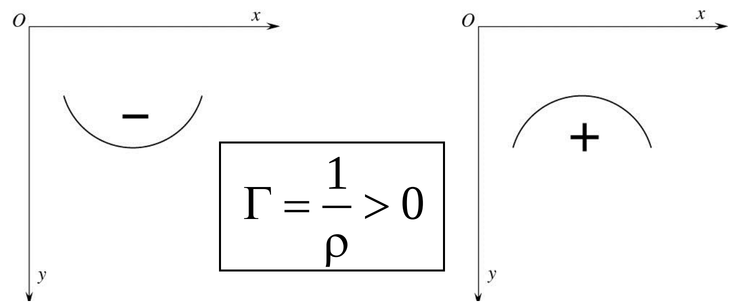




Ricordiamo le convenzioni sui segni di freccia, angolo di rotazione, curvatura, momento flettente







Il momento è positivo se sono compresse le fibre superiori

L'equazione differenziale che governa l'inflessione, già ricavata, si scrive generalmente in una delle seguenti forme:

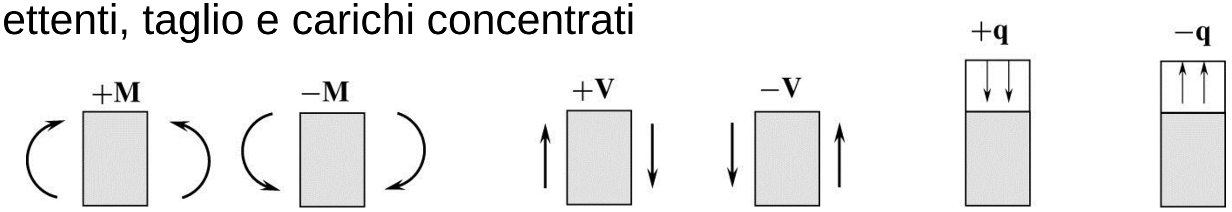
$$\Gamma(x) = \frac{1}{\rho(x)} = -\frac{M(x)}{E\ J} \qquad \frac{d\vartheta(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{E\ J} \qquad \boxed{\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E\ J}}$$

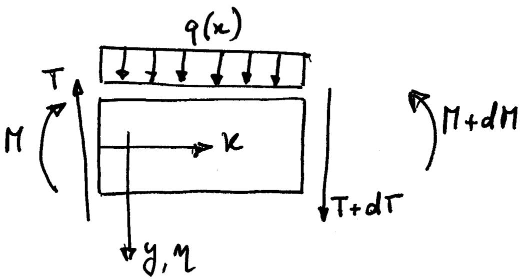
L'integrazione di quest'ultima, potrà essere compiutamente eseguita introducendo due costanti di integrazione

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = -\int_0^x \frac{M(x)}{E\ J}dx + C_1 \qquad \eta(x) = -\int_0^x \left[\int_0^x \frac{M(x)}{E\ J}dx + C_1\right]dx + C_2$$

C_1 e C_2 vanno risolte conoscendo le condizioni al contorno agli estremi di integrazione

Se invece si fosse in presenza di carichi distribuiti, ricordando le convenzioni anche di momenti flettenti, taglio e carichi concentrati





Equilibrio delle forze

$$-T + T + dT + q(x)\ dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{dx} = -q(x)}$$

Equilibrio dei momenti (al I ordine nel punto più a sinistra)

$$M - M - dM + T\ dx + \cancel{dT dx} + \cancel{q(x)\ \frac{dx^2}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dM}{dx} = T(x)}$$

Differenziando una volta e ricordando l'equazione del II ordine della linea elastica si ottengono:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)$$

$$\boxed{\frac{d^4\eta(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E\ J}}$$

Per essere integrata saranno ora necessarie quattro condizioni al contorno

$$\frac{d^4\eta(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{E\ J}$$

$$\frac{d^3\eta(x)}{dx^3} = \int_0^x \frac{q(x)}{E\ J} dx + C_1$$

$$T(x) = -E\ J\ \frac{d^3\eta(x)}{dx^3}$$

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} = \int_0^x \left[\int_0^x \frac{q(x)}{E\ J} dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$M(x) = -E\ J\ \frac{d^2\eta(x)}{dx^2}$$

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x \frac{q(x)}{E\ J} dx + C_1 \right] dx + C_2 \right] dx + C_3$$

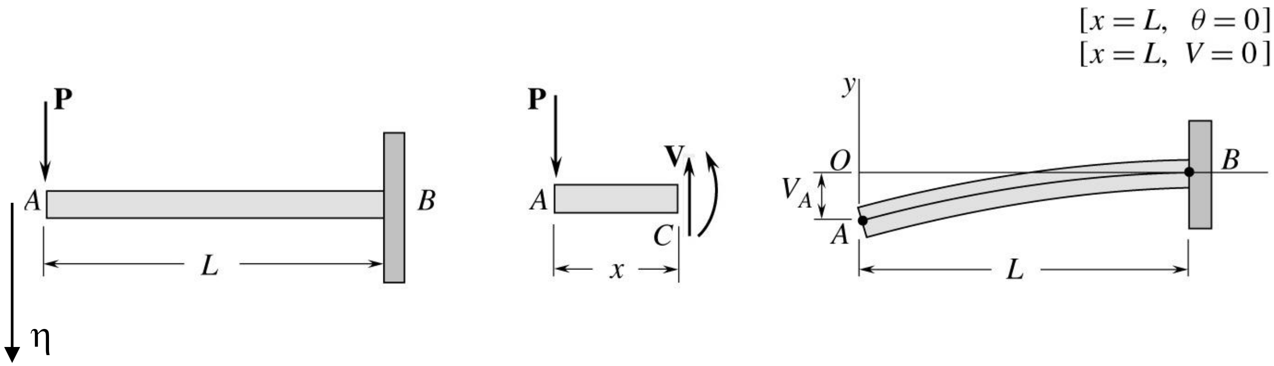
$$\vartheta(x) = -\frac{d\eta(x)}{dx}$$

$$\eta(x) = \int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x \frac{q(x)}{E\ J} dx + C_1 \right] dx + C_2 \right] dx + C_3 \right] dx + C_4$$

Le condizioni al contorno possono essere date su η , ϑ ma anche su taglio *T* e momento *M*

Incastro		appoggio		libero	
$\eta(x) = 0$	$\vartheta(x) = 0$	$\eta(x) = 0$	$M(x) = 0$	$T(x) = 0$	$M(x) = 0$

Esempio 1: Trave caricata a sbalzo



Il momento flettente in x è:

$$M(x) = -P\,x$$

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} = \frac{P\,x}{E\,J}$$

Le condizioni al contorno sono

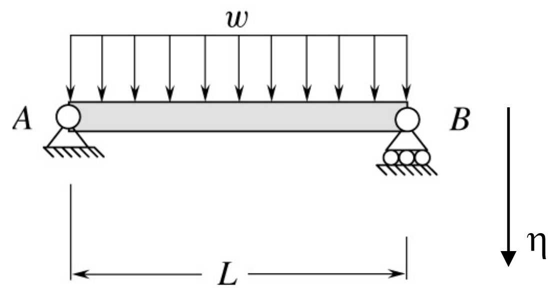
$$\begin{cases} 0 = \eta(x)\big|_{x=L} = \dfrac{1}{6}\dfrac{P\,x^3}{E\,J} + C_1 x + C_2 \\ 0 = \vartheta(x)\big|_{x=L} = \dfrac{1}{2}\dfrac{P\,x^2}{E\,J} + C_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{P\,L^3}{E\,J} \\ C_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{P\,L^2}{E\,J} \end{cases}$$

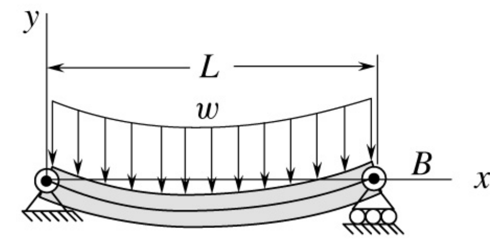
$$\eta(x) = \frac{1}{6}\frac{P\,x^3}{E\,J} - \frac{1}{2}\frac{P\,L^2}{E\,J}x + \frac{1}{3}\frac{P\,L^3}{E\,J}$$

Nel punto di applicazione del carico (x=0)

$$\eta(0) = \frac{1}{3}\frac{P\,L^3}{E\,J} \qquad \vartheta(0) = \frac{1}{2}\frac{P\,L^2}{E\,J}$$

Esempio 2: Carico distribuito





$[x = 0,\ M = 0]$ $[x = L,\ M = 0]$

$[x = 0,\ v = 0]$ $[x = L,\ v = 0]$

$$E\ J\ \frac{d^4\eta}{dx^4} = -w$$

$$E\ J\ \frac{d^3\eta}{dx^3} = -wx + C_1$$

$$E\ J\ \frac{d^2\eta}{dx^2} = -w\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$E\ J\ \frac{d\eta}{dx} = -w\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$E\ J\ \eta = -w\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Estremità sin	*Estremità dex*
$\eta(0) = 0$	$\eta(L) = 0$
$E\ J\ \dfrac{d^2\eta(0)}{dx^2} = 0$	$E\ J\ \dfrac{d^2\eta(L)}{dx^2} = 0$
$C_4 = 0$	$C_3 = \dfrac{1}{24} wL^3$
$C_2 = 0$	$C_1 = \dfrac{1}{2} wL$

Andamento della freccia

$$\eta(x) = \frac{1}{24E\ J}\left(-x^4 + 2Lx^3 - L^3 x\right)$$

Valore massimo (al centro)

$$\eta_{\max}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5\ w\ L^3}{384\ E\ J}$$