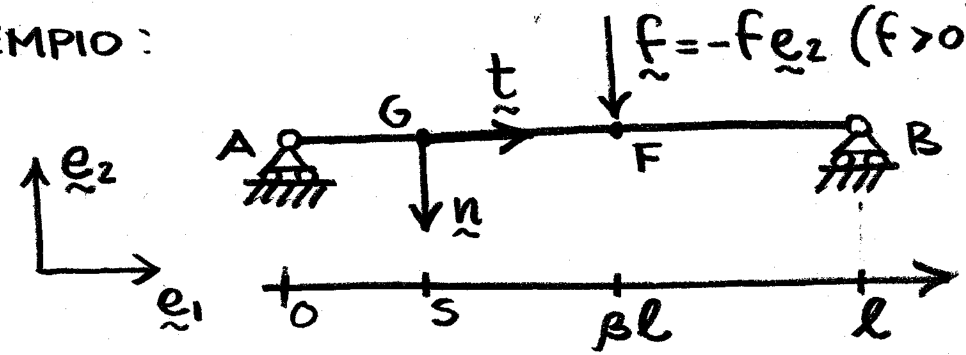
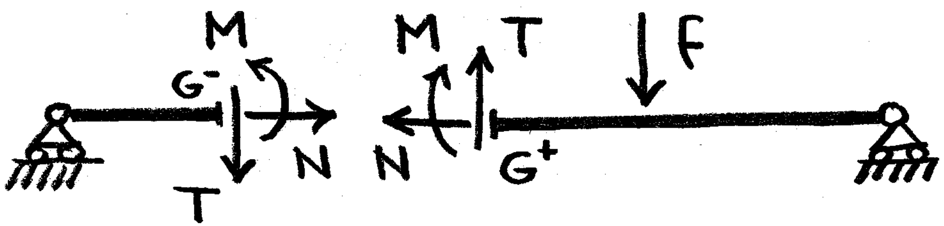
Travi piane ad asse rettilineo

ESEMPIO:



Nota: per convenzione, nelle travi ad asse rettilineo, $\underset{\sim}{n}$ è diretto come in figura rispetto a $\underset{\sim}{t}$ (verso il basso se s è orientata da sx a dx)

Effettuando un taglio ideale della trave in G:

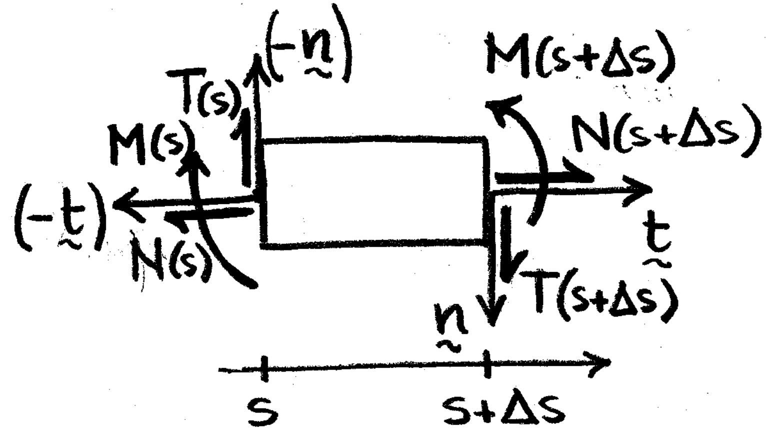


$$N = \underset{\sim}{f}^{+} \cdot \underset{\sim}{t} = -\underset{\sim}{f}^{-} \cdot \underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{f}^{-} \cdot (-\underset{\sim}{t})$$

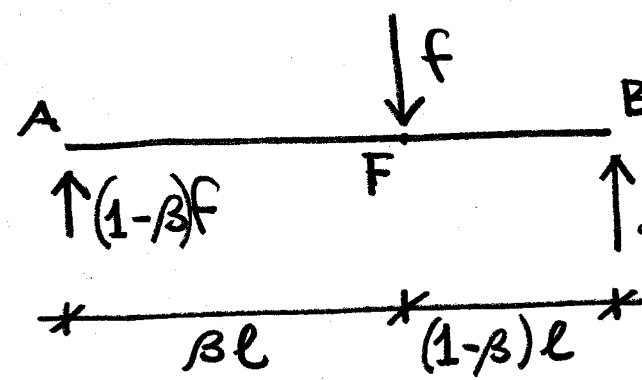
$$T = \underset{\sim}{f}^{+} \cdot \underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{f}^{-} \cdot (-\underset{\sim}{n})$$

$$M = \underset{\sim}{c}^{+} \cdot (\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{t}) = \underset{\sim}{c}^{-} \cdot (-\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{t}) \qquad (\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{t} = -\underset{\sim}{b})$$

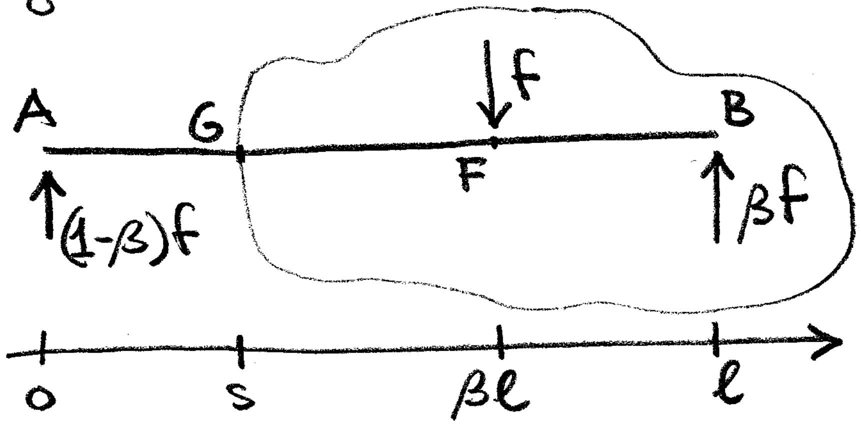
Le caratteristiche della sollecitazione possono essere calcolate sia "guardando a destra" sia "guardando a sinistra" della sezione di interesse.



Nell'esempio, calcoliamo preliminarmente le reazioni vincolari:



Ponendoci nella sezione di ascissa $s \in (0, \beta\ell)$ e guardando a destra:



$$\underset{\sim}{f}^+ = \underset{\sim}{r}^+ = -(1-\beta) f \, \underset{\sim}{e}_2$$

$$\underset{\sim}{c}^+ = m^+(G) = \big(\beta(\ell - s) - (\beta\ell - s)\big) f \, \underset{\sim}{e}_3$$

$$\underset{\sim}{c}^+ = (1-\beta) f s \, \underset{\sim}{e}_3$$

Proiettando su $\underset{\sim}{t}$, $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{t}$:

$$N = 0, \quad T = (1-\beta) f, \quad M = (1-\beta) f s$$

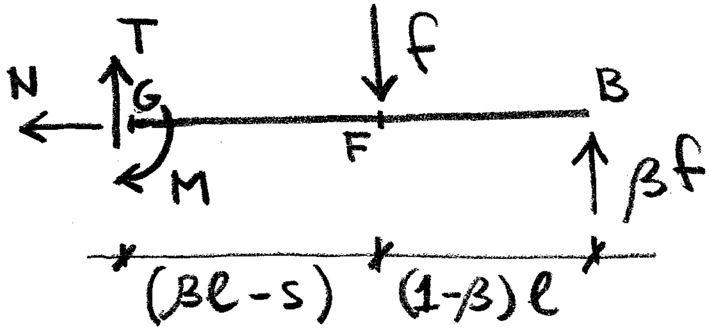
In alternativa, guardando a sinistra:

$$\underset{\sim}{f}^- = \underset{\sim}{r}^- = (1-\beta) f \, \underset{\sim}{e}_2,$$

$$\underset{\sim}{c}^- = m^-(G) = -(1-\beta) s \, \underset{\sim}{e}_3;$$

proiettando su $(-\underset{\sim}{t})$, $(-\underset{\sim}{n})$, $(-\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{t})$ si ottiene lo stesso risultato.

Un metodo equivalente per calcolare le c. d. s. è quello di bilanciare tutte le azioni, interne ed esterne, agenti su $\mathcal{L}^+$.



Assegnando i versi positivi alle incognite N, T, M e risolvendo le equazioni di equilibrio si ottiene:

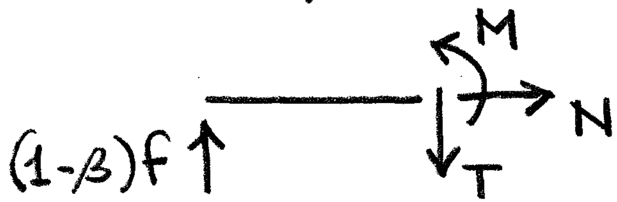
$$N = 0$$

$$T - f + \beta f = 0 \implies T = (1-\beta) f$$

$$m(G) = -M - f(\beta\ell - s) + \beta f(\ell - s) = 0$$

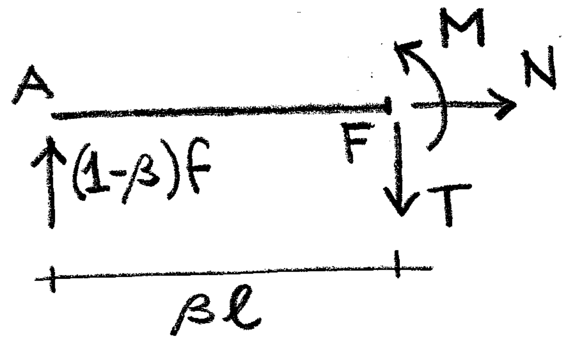
$$\implies M = (1-\beta) f s$$

In alternativa, bilancio su $\mathcal{L}^-$



Calcoliamo le c. d. s. in una sezione immediatamente a sinistra della sezione di applicazione della forza concentrata.

(bilancio su $\mathcal{L}^-$)

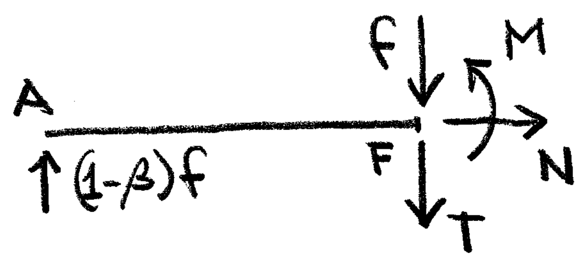


$N(\beta\ell^-) = 0$

$T(\beta\ell^-) = (1-\beta)f$

$M(\beta\ell^-) = (1-\beta)\beta\ell f$

Poniamoci ora in una sezione immediatamente a destra di F.



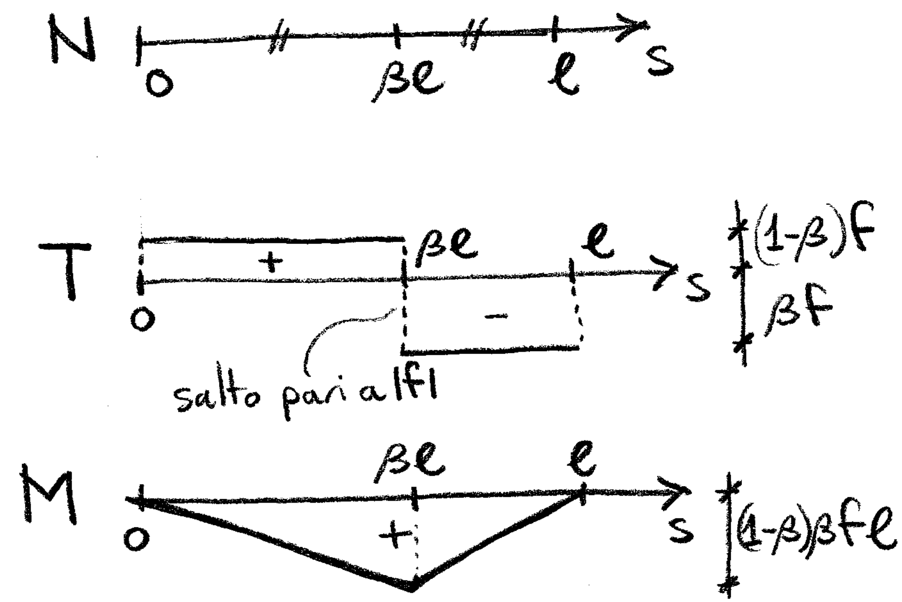
$N(\beta\ell^+) = 0$

$T(\beta\ell^+) = (1-\beta)f - f = -\beta f$

$M(\beta\ell^+) = (1-\beta)\beta\ell f$

Vediamo che in corrispondenza del carico concentrato ortogonale all'asse la funzione taglio subisce un salto.

Diagrammi



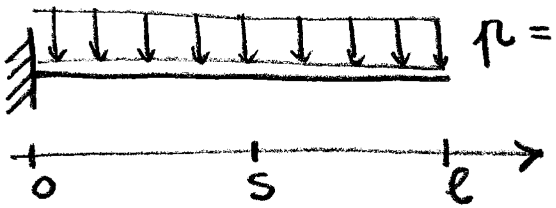
oss. 1: se $\beta = \frac{1}{2}$ (carico in mezzeria)

allora $M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{f\ell}{4}$

oss. 2: cambiando l'orientamento dell'asse, il momento flettente cambia segno (ma non N e T).

Il diagramma di M viene sempre tracciato dalla parte delle fibre tese per motivi pratici (posizionamento delle armature di acciaio nelle travi di cemento armato)

ESEMPIO:



$p = \text{cost} > 0 \quad (\underset{\sim}{p} = p\,\underset{\sim}{n},\ q = 0)$

Equazioni di equilibrio puntuale

$$N' = 0 \Rightarrow N = \text{cost} = 0$$

(guardando a dx o a sx, non ci sono carichi lungo l'asse)

$$T' + p = 0$$

integrando da s a ℓ

$$\cancel{T(\ell)} - T(s) + \int_s^\ell p\, dt = 0$$

(guardando a dx)

$$\Rightarrow T(s) = p(\ell - s)$$

$$M' - T = 0 \quad , \quad M' = T$$

$$\cancel{M(\ell)} - M(s) = \int_s^\ell T(t)\, dt$$

(guardando a dx)

$$M(s) = -\left[p\ell t - p\frac{t^2}{2}\right]_s^\ell = -p\frac{(\ell-s)^2}{2}$$

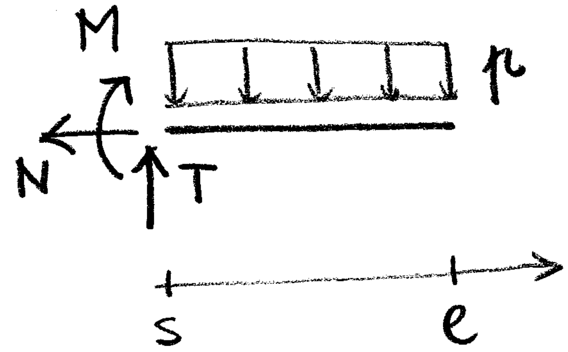
Bilanciamento del tratto $\mathcal{L}^+$

$$N = 0$$

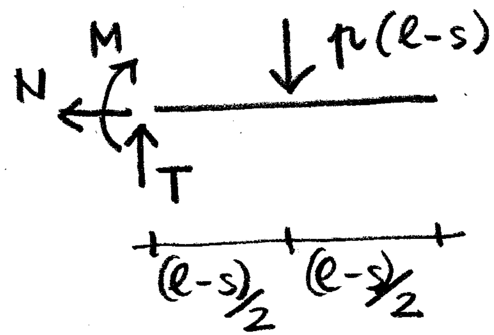
$$T - p(\ell - s) = 0$$

$$T = p(\ell - s)$$

$$-M - p\frac{(\ell-s)^2}{2} = 0$$

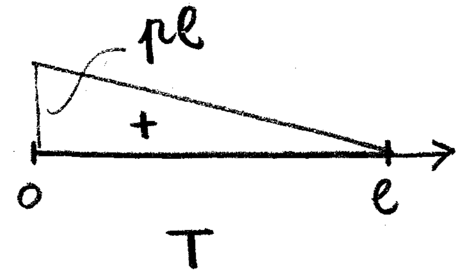


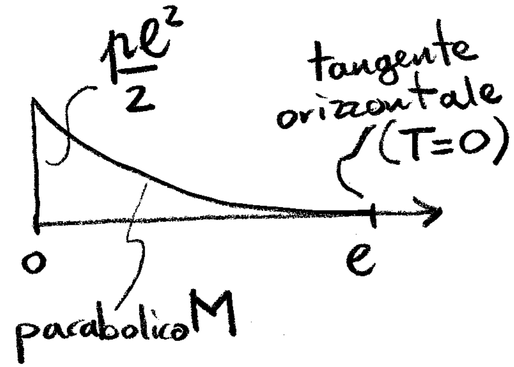
(Come se il carico distribuito fosse concentrato nella mezzeria di $\mathcal{L}^+$:



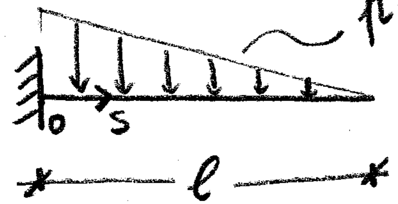
)

Diagrammi:



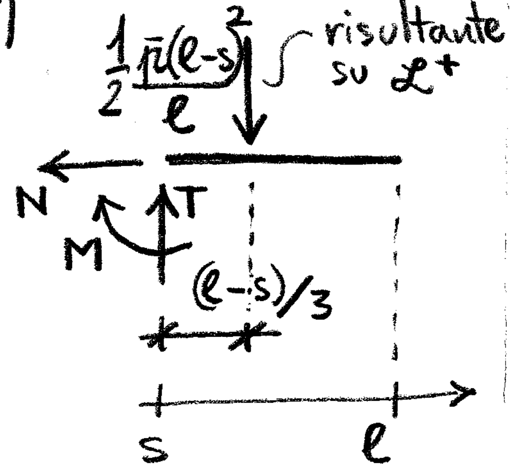


ESERCIZIO:



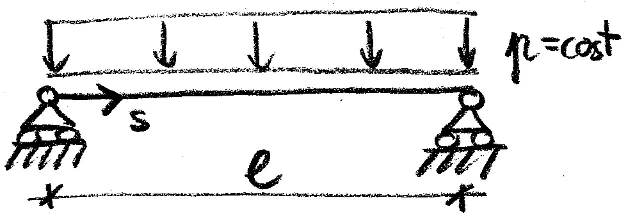
$p = \bar{p}\left(1-\frac{s}{\ell}\right)$

suggerimento:

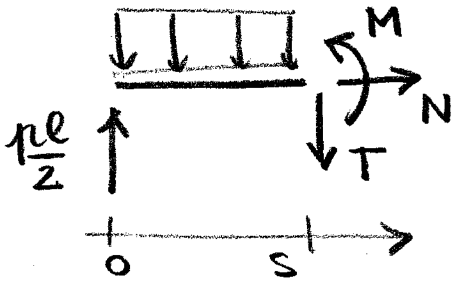


Diagrammi

ESEMPIO:



Bilanciamento del tratto $\mathcal{L}^-$



$N = 0$

$\frac{p\ell}{2} - ps - T = 0$

$T = p\left(\frac{\ell}{2} - s\right)$

$$M + ps\frac{s}{2} - \frac{p\ell}{2}s = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{2}ps(\ell - s)$$