

Trave di Timoshenko

(sia ψ che χ sono diversi da zero)

legame costitutivo $M = r_F \psi$, $T = r_S \chi$

compat. cinematica $\psi = \varphi'$, $\chi = \varphi + v'$

equilib. $M' - T + e = 0$, $T' + p = 0$

(nota: $M'' = T' - e' = -p - e'$)

$$\Rightarrow \begin{cases} (r_F \varphi')' - r_S (v' + \varphi) + e = 0 \\ (r_S (v' + \varphi))' + p = 0 \end{cases}$$

caso in cui r_F e r_S sono costanti

$$r_F \varphi''' = -p - e'$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_p + \varphi_g$$

soluz. particolare

soluz. generale di $\varphi''' = 0$

$$\begin{cases} \varphi_g = az^2 + bz + c \\ \varphi_g' = 2az + b \\ \varphi_g'' = 2a \end{cases}$$

$$r_F \varphi'' - r_S (v' + \varphi) + e = 0$$

$$r_F (\varphi_p'' + 2a) - r_S (v' + \varphi_p + az^2 + bz + c) + e = 0 \Rightarrow v$$

 r_S rigidezza allo scorrimento

$$r_S = \frac{GA}{\chi}$$

A area sez. trasversale
 G modulo di scorrimento
 dirett. proporz. a E
 (ne parleremo più avanti)
 dimensioni FL^{-2}

χ Fattore di taglio
 coeff. adimensionale
 che tiene conto della
 forma della sezione
 χ è sempre > 1

SdC

caso in cui $e=0$, $p=0$ (oltre ad avere r_F, r_S costanti)

$$\varphi = az^2 + bz + c$$

$$v' = \frac{r_F}{r_S} \varphi'' - \varphi \quad \leftarrow \quad r_F \varphi'' - r_S (v' + \varphi) = 0$$

$$v' = \frac{r_F}{r_S} (2a) - (az^2 + bz + c)$$

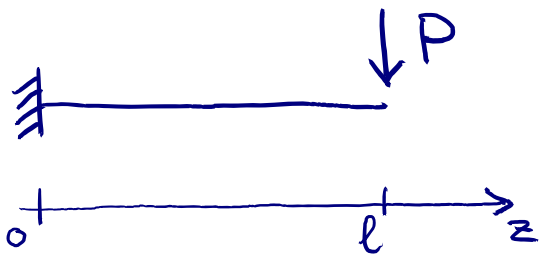
$$v = 2 \frac{r_F}{r_S} az - \left(a \frac{z^3}{3} + b \frac{z^2}{2} + cz \right) + d$$

$$v = -\frac{az^3}{3} - \frac{bz^2}{2} + \left(2 \frac{r_F}{r_S} a - c \right) z + d$$

soluzione
per $e=0, p=0$
e r_F, r_S costanti

al solito, le costanti di integrazione
 a, b, c, d vanno determinate
tramite le condizioni al contorno
e le condizioni di raccordo

Esempio: mensola



condiz. al contorno

$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0$$

$$T(l) = P, \quad M(l) = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

SdC

$$T(z) = M' = r_F \varphi'' = 2r_F a$$

$$M(z) = r_F \varphi' = r_F (2az + b)$$

$$T(\ell) = P \Rightarrow a = \frac{P}{2r_F}$$

$$M(\ell) = 0 \Rightarrow r_F \left(\frac{P}{r_F} \ell + b \right) = 0 \Rightarrow b = -\frac{P\ell}{r_F}$$

$$v(z) = -\frac{P}{6r_F} z^3 + \frac{P\ell}{2r_F} z^2 + 2 \frac{r_F}{r_s} \frac{P}{2r_F} z$$

$$v(z) = -\frac{P}{6r_F} z^3 + \frac{P\ell}{2r_F} z^2 + \frac{P}{r_s} z$$

$$v(\ell) = \frac{P\ell^3}{3r_F} + \frac{P\ell}{r_s} =: v^T \quad \text{spostamento all'estremità della mensola secondo il modello di Timoshenko}$$

$$v^{B-N} := \frac{P\ell^3}{3r_F}$$

spostamento secondo il modello di B-N

calcoliamo la differenza percentuale

$$J = Ap^2, \quad p \sim H \quad \text{altezza della sezione}$$

$$\frac{v^T - v^{B-N}}{v^{B-N}} = \frac{\cancel{P\ell}}{r_s} \frac{3r_F}{\cancel{P\ell^3}^2} = 3 \frac{r_F}{r_s} \frac{1}{\ell^2} = 3 \frac{EJ\chi}{GA\ell^2} \sim \frac{H^2}{\ell^2}$$

se il rapporto H/ℓ è piccolo (trave snella) $E \sim G, \chi \sim 1$
 allora la differenza tra i due spostamenti è trascurabile
 $\Rightarrow$ nelle travi snelle ($H/\ell < 0,1$) possiamo trascurare le deformazioni di scorrimento

SdC

osservazione :



nelle travi snelle anche le deformazioni
estensionali possono essere
trascurate rispetto a quelle flessionali
se i carichi assiali sono
comparabili ai carichi flessionali
(esercizio: verificare)