

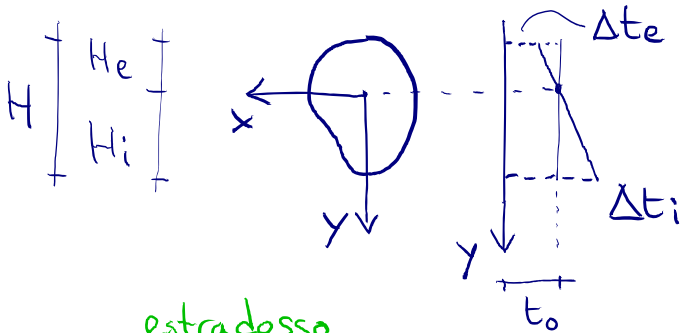
osservazione:



nelle travi snelle anche le deformazioni estensionali possono essere trascurate rispetto a quelle flessionali se i carichi assiali sono comparabili ai carichi flessionali
(esercizio: verificare)

Deformazioni flessionali di origine termica

H_p: variazione di temperatura lineare in y e costante in x



deformazione di ogni fibra longitudinale: $\propto \Delta t(y, z)$
con $\Delta t(y, z) = t_0(z) + t_1(z)y$

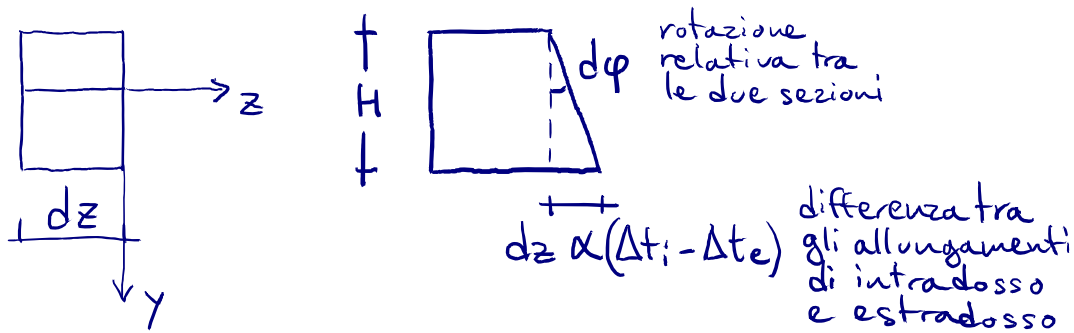
ponendo $\Delta t_e = t_0 - t_1 H_e$, $\Delta t_i = t_0 + t_1 H_i$
e risolvendo rispetto a t_0, t_1 si ottiene:
(esercizio: verificare)

$$\begin{cases} t_0 = \frac{H_e \Delta t_e + H_i \Delta t_i}{H} \\ t_1 = \frac{\Delta t_i - \Delta t_e}{H} \end{cases}$$

$t_0(z) = \Delta t(0, z)$ è la quota costante di Δt sulla sezione
⇒ deformazione estensionale di origine termica

$$\epsilon_{\text{term}} = \alpha t_0 \quad (\text{come avevamo visto in precedenza})$$

t_1 dà origine a una deformazione flessionale
concio di trave di lunghezza dz



$$d\varphi \cong \tan(d\varphi) = \frac{dz \alpha (\Delta t_i - \Delta t_e)}{H}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \alpha t_1 =: \psi_{\text{term}}$$

$$\psi = \psi_{\text{mecc}} + \psi_{\text{term}} = \frac{M}{EJ} + \alpha t_1$$

$$\Leftrightarrow M = EJ(\psi - \alpha t_1), \quad \psi = -v'', \quad M'' = -p - c'$$

$$\Rightarrow \boxed{(EJ(v'' + \alpha t_1))'' = p + c'}$$

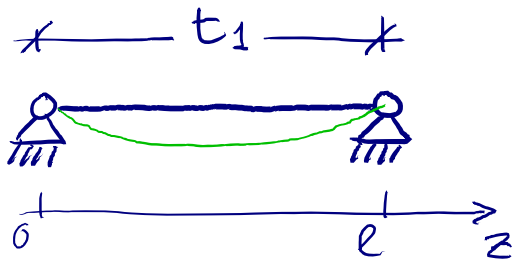
$$M = -EJ(v'' + \alpha t_1)$$

$$T = -(EJ(v'' + \alpha t_1))' + c$$

equazione della
linea elastica
quando ci sono anche
deformazioni di
origine termica

ESEMPIO: $t_1, EJ > 0$ costanti lungo l'asse

$$p=0, c=0$$



$$\Rightarrow v^{IV} = 0$$

$$v = az^3 + bz^2 + cz + d$$

$$v' = 3az^2 + 2bz + c$$

$$v'' = 6az + 2b$$

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

$$M(0) = 0 \Leftrightarrow 2b + \alpha t_1 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{\alpha t_1}{2}$$

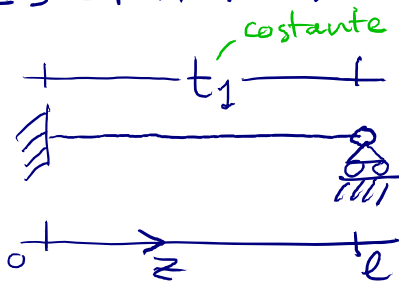
$$M(l) = 0 \Leftrightarrow 6al + 2b + \alpha t_1 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$v(l) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha t_1}{2} l^2 + cl = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\alpha t_1}{2} l$$

$$v(z) = \frac{\alpha t_1}{2} (lz - z^2)$$

la trave si inflette con curvatura costante pari a αt_1

ESEMPIO:



stessa equazione
diverse condizioni
al contorno

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

$$\varphi(0) = -v'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$M(l) = -EJ(v''(l) + \alpha t_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6al + 2b + \alpha t_1 = 0 \Leftrightarrow b = -3al - \frac{\alpha t_1}{2}$$

$$v(l) = 0 \Leftrightarrow al^3 - \left(3al + \frac{\alpha t_1}{2}\right) l^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{\alpha t_1}{4l}$$

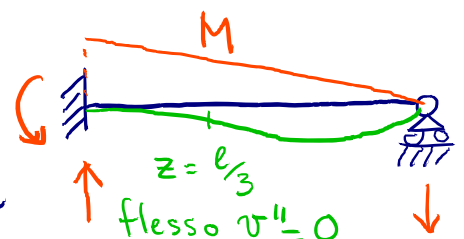
$$v(z) = \frac{\alpha t_1}{4l} (lz^2 - z^3)$$

$$b = \frac{\alpha t_1}{4}$$

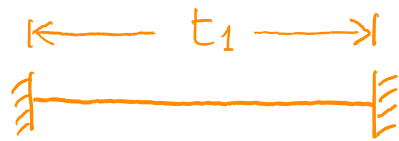
reazioni vincolari

$$T(l) = -EJ v''' = -EJ(6a) = \frac{3}{2} EJ \frac{\alpha t_1}{l}$$

$$M(0) = -EJ(v'' + \alpha t_1) = -\frac{3}{2} EJ \alpha t_1 = -T(l) l$$

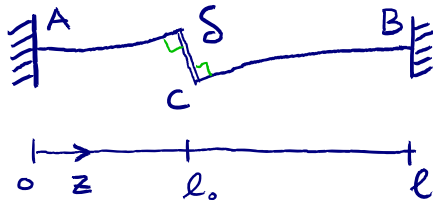


Esercizio :

 t_1 costante > 0

Deformazioni dovute a distorsioni

ESEMPIO :



① $v_A = 0$, ② $\varphi_A = 0$

③ $v_B = 0$, ④ $\varphi_B = 0$

⑤ $[v]_C = \delta$, ⑥ $[\varphi]_C = 0$

⑦ $[T]_C = 0$, ⑧ $[M]_C = 0$

$$v(z) = \begin{cases} v_1(z) , & z \in (0, l_0) \\ v_2(z) , & z \in (l_0, l) \end{cases}$$

$$v_i(z) = a_i z^3 + b_i z^2 + c_i z + d_i , \quad i = 1, 2$$

① $v_1(0) = 0 \Rightarrow d_1 = 0$

② $v_1'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

⑦ $v_2'''(l_0) - v_1'''(l_0) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$

⑧ $v_2''(l_0) - v_1''(l_0) = 0 \Rightarrow b_1 = b_2$

⑥ $v_2'(l_0) - v_1'(l_0) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

⑤ $v_2(l_0) - v_1(l_0) = \delta \Rightarrow d_2 = \delta$

④ $v_2'(l) = 0 \Rightarrow 3a_2 l^2 + 2b_2 l = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{3}{2} a_2 l$

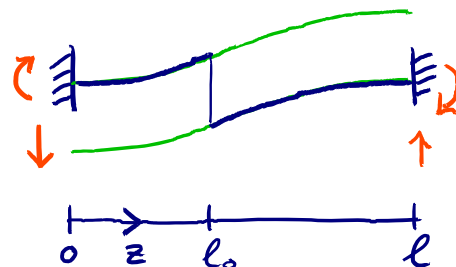
③ $v_2(l) = 0 \Rightarrow a_2 l^3 - \frac{3}{2} a_2 l^3 + \delta = 0 \Rightarrow a_2 = 2\delta / l^3$

$$v_1(z) = \frac{2\delta}{l^3} z^3 - \frac{3\delta}{l^2} z^2 , \quad z \in (0, l_0)$$

$$v_2(z) = \frac{2\delta}{l^3} z^3 - \frac{3\delta}{l^2} z^2 + \delta , \quad z \in (l_0, l)$$

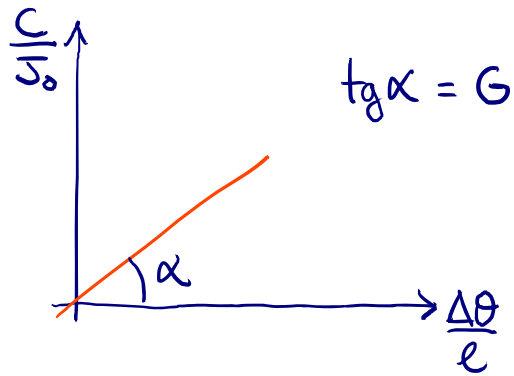
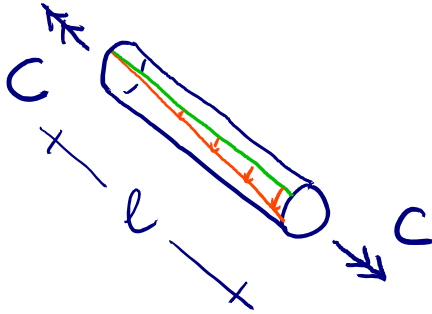
$$M(0) = \frac{\delta r_F \delta}{l^2} = -M(l)$$

$$T = -\frac{12 r_F \delta}{l^3}$$



Deformazioni torsionali

prova di torsione
su un cilindro circolare retto



$\Delta\theta$ rotazione relativa
tra le basi intorno
all'asse del cilindro

J_0 momento d'inerzia
polare della sezione

G modulo di scorrimento

$$C = G J_0 \frac{\Delta\theta}{l}$$

$$M_T = r_T \psi_T$$

relazione costitutiva

$$\psi_T = \theta' = \frac{d\theta}{dz} \quad \left(\sim \frac{\Delta\theta}{l} \right)$$

equazione di
compatibilità
cinematica

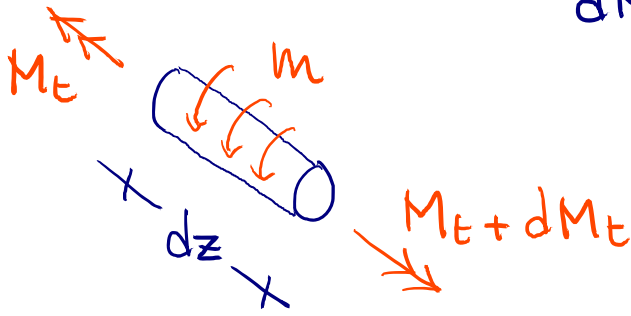
$$r_T = \frac{G J_0}{\chi_T}$$

fattore di torsione
coefficiente adimensionale

$$\chi_T \geq 1$$

con $\chi_T = 1$ nel caso
di sezione circolare
o a forma di anello
circolare

Equazione di equilibrio



$$dM_t + m dz = 0$$

$$\Rightarrow M_t' + m = 0$$

combinando le tre relazioni:

$$(r_T \theta')' = -m$$

$$(\text{analoga a } (r_E w')' = -q)$$