# Elementi della teoria lineare delle travature elastiche ad asse rettilineo

## 1. Principio di sovrapposizione

stato elastico $\mathcal{S} := \{\underbrace{w, v, \varphi, \vartheta}_{\text{"spostamento"}} ; \underbrace{\varepsilon, \gamma, \psi, \psi_t}_{\text{"deformazione"}} ; \underbrace{N, T, M, M_t}_{\text{"sforzo"}}\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= w' \\ \gamma &= v' + \varphi \\ \psi &= \varphi' \\ \psi_t &= \vartheta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N &= r_E\, \varepsilon \\ T &= r_S\, \gamma \\ M &= r_F\, \psi \\ M_t &= r_T\, \psi_t \end{aligned}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI STATI ELASTICI

data una travatura linearmente elastica

$\mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2$ stati elastici

$$\Downarrow$$

$\mathcal{S} := \alpha_1 \mathcal{S}_1 + \alpha_2 \mathcal{S}_2 \; , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

è uno stato elastico
per la travatura data

$$\mathcal{S} = \{ w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \, , \; v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \, , \ldots \}$$

# 2. Energia elastica. Teorema del Lavoro e dell'Energia

ELV:

trascurando i contributi termici

$$\int_{\mathcal{L}} \left( \frac{N\bar{N}}{r_E} + \frac{T\bar{T}}{r_S} + \frac{M\bar{M}}{r_F} + \frac{M_t\bar{M}_t}{r_T} \right) =$$

$$= \int_{\mathcal{L}} \left( q\bar{w} + p\bar{v} + c\bar{\varphi} + m\bar{\theta} \right) + \sum_{i=1}^{I} (Q\bar{w})_i + \sum_{j=1}^{J} (P\bar{v})_j + \sum_{k=1}^{K} (C\bar{\varphi})_k + \sum_{h=1}^{H} (C_t\bar{\theta})_h$$

sistema congruente:

quello indotto nella travatura dai carichi applicati

$$\bar{N} = N,\ \bar{T} = T, \ldots;\ \bar{w} = w,\ \bar{v} = v, \ldots$$

$\Longrightarrow$ per una travatura lin. elastica in equilibrio

$$\boxed{L(\mathcal{L}) = 2\,W(\mathcal{L})}$$

lavoro dei carichi

$$L(\mathcal{L}) := \int_{\mathcal{L}} \left( qw + pv + c\varphi + m\theta \right) + \sum_{i=1}^{I} (Qw)_i + \sum_{j=1}^{J} (Pv)_j + \sum_{k=1}^{K} (C\varphi)_k + \sum_{h=1}^{H} (C_t\theta)_h$$

energia elastica

$$W(\mathcal{L}) := \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{r_E} + \frac{T^2}{r_S} + \frac{M^2}{r_F} + \frac{M_t^2}{r_T} \right)$$

## 3. Teorema di Reciprocità

sistema di carichi $\mathcal{F} := \{ q, p, c, \dots \}$

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ stati elastici in equilibrio con $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$

$$L_{12}(\mathcal{L}) := \int_{\mathcal{L}} (q_1 w_2 + p_1 v_2 + \dots) + \dots =$$

$$= \int_{\mathcal{L}} \left( \frac{N_1 N_2}{r_E} + \frac{T_1 T_2}{r_S} + \dots \right) =$$

$$= \int_{\mathcal{L}} (q_2 w_1 + p_2 v_1 + \dots) + \dots =: L_{21}(\mathcal{L})$$

## 4. Teorema di Unicità

PROBLEMA DI EQUILIBRIO

data una travatura linearmente elastica
e dato un sistema di carichi $\mathcal{F}$,
trovare uno stato elastico $\mathcal{S}$ in equilibrio con $\mathcal{F}$

TEOREMA DI UNICITÀ

se un pb. di equilibrio per una travatura lin. elastica ha soluzione, questa è unica (a meno di un eventuale moto rigido consentito dai vincoli)

Dimostrazione: (per contraddizione)

$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ stati elastici distinti in equilibrio con $\mathcal{F}$

$\Delta\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$ è in equilibrio con carichi nulli (linearità del problema)

dal Teor. del Lavoro e dell'Energia

$$0 = L = 2E = \int_{\mathcal{L}} \left( \frac{N^2}{r_E} + \frac{T^2}{r_S} + \ldots \right)$$

$\Longrightarrow$ c. di s. identicamente nulle in $\mathcal{L}$

$\Longrightarrow$ $\varepsilon \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, $\psi_t \equiv 0$ (dal legame costitutivo)

$\Longrightarrow$ $w = w_0$, $v = v_0 - \varphi_0 z$, $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$ (moto rigido)

se i vincoli esterni impediscono i moti rigidi

allora $\Delta\mathcal{S} \equiv 0$, $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ (contraddizione)