Richiami e complementi di algebra lineare

V spazio vettoriale 3D, $\{e_1, e_2, e_3\}$ base di V

$\underset{\sim}{v} \in V$, $\boxed{v_i := \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{e}_i} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{e}_i} \left(= \sum_{i=1}^{3} v_i \underset{\sim}{e}_i \right.$ gli indici ripetuti sottintendono la sommatoria $\left.\right)$

$$\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{e}_j = v_i \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = v_i \delta_{ij} = v_j$$

$$[\underset{\sim}{v}] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$ rappresentazione di $\underset{\sim}{v}$ nella base $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$

$$\boxed{\delta_{ij} := \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}}$$

prodotto diadico

la diade $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$ è un tensore del secondo ordine definito da

$$\boxed{(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})\underset{\sim}{c} = (\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{c})\underset{\sim}{a} \quad \forall \underset{\sim}{c} \in V}$$

$$(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})\underset{\sim}{e}_i = (\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{a} = b_i \underset{\sim}{a}$$

$$[a \otimes b] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

le 9 diadi $\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$ per $i,j = 1,2,3$
costituiscono una base per lo spazio dei tensori del secondo ordine

prodotto scalare tra diadi $\boxed{(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) \cdot (\underset{\sim}{c} \otimes \underset{\sim}{d}) = (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{d})}$

prodotto scalare tra un tensore e una diade

$$\boxed{\underset{\sim}{A} \cdot a \otimes b = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{b} \cdot a}$$

componenti di un tensore

$$\boxed{A_{ij} := \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_i \quad , \quad \boxed{\underset{\sim}{A} = \underbrace{A_{ij}}_{\text{componenti}} \underbrace{e_i \otimes e_j}_{\text{elementi della base}}}$$ (sommatoria sugli indici ripetuti)

i: riga, j: colonna

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{e}_h \otimes \underset{\sim}{e}_k = A_{ij}(e_i \otimes e_j) \cdot (e_h \otimes e_k) = A_{ij}(e_i \cdot e_h)(e_j \cdot e_k) = A_{ij} \delta_{ih} \delta_{jk} = A_{hk}$$

per una diade

$$(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})_{ij} = (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) \cdot (\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) = (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{e}_i)(\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{e}_j) = a_i b_j$$

$$\boxed{Ab} = A_{ij}(e_i \otimes e_j)(b_k \underset{\sim}{e}_k) = \text{"prodotto righe per colonne"}$$
$$= A_{ij} b_k (e_j \cdot e_k) e_i = \boxed{A_{ij} b_j \underset{\sim}{e}_i}$$

prodotto scalare tra tensori

$$\boxed{A \cdot B = A_{ij} B_{ij}}$$ somma dei prodotti delle componenti omologhe

Attenzione a non confondere vettori e tensori con le loro rappresentazioni in una base data

$\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{A}$ non dipendono dalla base scelta, diversamente dalle loro rappresentazioni $[\underset{\sim}{v}]$, $[\underset{\sim}{A}]$

definizione di tensione

teor. del tetraedro

$$\underset{\sim}{c}(X,\underset{\sim}{n}) = \underset{\sim}{t}(X,\underset{\sim}{n}) = \underset{\sim}{T}(X)\,\underset{\sim}{n}$$

$$\underset{\sim}{T}(X) = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{t}(X,n_i)\otimes n_i \quad , \quad \underset{\sim}{n_i}\ , i=1,2,3$$

terna arbitraria di vettori ortonormali (vedi osservazione sul libro)

$$T(X) = \sum_{i=1}^{3} t(X,e_i)\otimes e_i$$

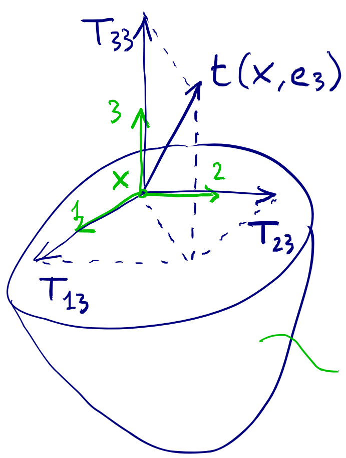
$$T(x)\,e_j = (e_i\cdot e_j)\,t(x,e_i) = \delta_{ij}\,t(x,e_i) = t(x,e_j)$$

$$T_{kj} = T\cdot e_k\otimes e_j = T e_j\cdot e_k = t(x,e_j)\cdot e_k$$

k-esima componente del vettore tensione sulla giacitura di normale $\underset{\sim}{e_j}$

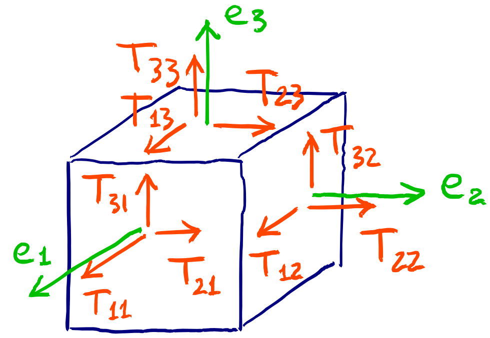
$[\underset{\sim}{t}(x,e_j)]$ è la j-esima colonna di $[\underset{\sim}{T}]$

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$



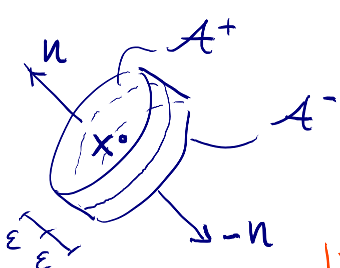
le colonne di $[\underset{\sim}{T}]$ rappresentano i vettori tensione sulle giaciture che hanno per normali i vettori di base

corpo $\mathcal{B}$ sezionato con un piano di normale $\underset{\sim}{e_3}$



dimostrazione di

$$t(x,n) = -t(x,-n)$$



$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \mathcal{A}\times(-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \partial\mathcal{A}\times(-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\cancel{\int_{\mathcal{P}(\varepsilon)} \underset{\sim}{d}} + \cancel{\int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \underset{\sim}{c}} + \int_{\mathcal{A}^+} \underset{\sim}{c} + \int_{\mathcal{A}^-} \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}\right) \qquad (t = c \text{ in } \mathcal{B})$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{A}} t(x,\underset{\sim}{n}) + t(x,-n) = 0 \qquad \forall\mathcal{A}$$

lemma di localizzazione $\Rightarrow\ t(x,n) = -t(x,-n)$

osservazione:

sul bordo di $\mathcal{B}$ si ha $\quad T(x)\,n(x) = c_0(x, n(x))\ , x \in \partial\mathcal{B}$

---

campo scalare (scalare che dipende dalla posizione)

$f(x)$, con $X = O + x_i \underset{\sim}{e}_i$ $\quad$ $\boxed{X - O = x_i \underset{\sim}{e}_i}$ vettore posizione

coordinate di X

notazione per le derivate parziali $\quad \boxed{f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}}$

divergenza di un vettore (è uno scalare)

$\mathrm{Div}\, \underset{\sim}{v} = v_{i,i} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}$ $\quad$ v è un campo vettoriale

divergenza di un tensore (è un vettore)

$\mathrm{Div}\, A = A_{ij,j}\, \underset{\sim}{e}_i$ $\quad$ ogni componente di $\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{A}$ è la divergenza della riga corrispondente di $[\underset{\sim}{A}]$ $\quad$ A è un campo tensoriale

Lemma della divergenza (Ω regione dello spazio 3D)

$$\int_\Omega \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{v} = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n} \qquad (*)$$

$$\int_\Omega \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{A} = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{n} \qquad (**)$$

dato $\underset{\sim}{b}$ costante

(Δ) $\quad \boxed{\mathrm{Div}(\underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{b}) = (\mathrm{Div}\, \underset{\sim}{A}) \cdot \underset{\sim}{b}}$, infatti $\quad (A^T b)_{i,i} = (A^T_{ij} b_j)_{,i} = A^T_{ij,i}\, b_j = A_{ji,i}\, b_j$

il lemma della divergenza scritto per un tensore si può ottenere da quello scritto per un vettore

$$(*) \quad \int_\Omega \mathrm{Div}(A^T b) = \int_{\partial\Omega} (A^T b)\cdot n \overset{(\Delta)}{\Leftrightarrow} \left(\int_\Omega \mathrm{Div}\, A\right)\cdot b = \left(\int_{\partial\Omega} A n\right)\cdot b \quad \forall b$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{A} = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{n} \quad (**)$$

(esercizio: dimostrare che $(**) \Rightarrow (*)$)

equilibrio alla traslazione

lemma della divergenza

equilibrio per parti

$$\underbrace{\mathbf{0} = \int_P \mathbf{d} + \int_{\partial P} \mathbf{c}} = \int_P \mathbf{d} + \int_{\partial P} \mathbf{T}\mathbf{n} = \int_P (\mathbf{d} + \mathrm{Div}\,\mathbf{T}) \qquad \forall P \subset B$$

per localizzaz. $\Rightarrow$ $\mathrm{Div}\,T + d = 0 \quad \forall x \in B$ condizione di equilibrio puntuale

dato $\mathbf{T}$ si può ottenere $\mathbf{d} = -\mathrm{Div}\,\mathbf{T}$ (oltre a $\mathbf{c} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ in B e $\mathbf{c}_0 = \mathbf{T}\mathbf{n}$ su ∂B)

assumendo $d \in C^{(0)}(B)$, $c_0 \in C^{(0)}(\partial B)$ si deve avere $T \in C^{(1)}(B) \cup C^{(0)}(\bar{B})$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^{(ni)} + \mathbf{d}^{(in)}, \quad \mathbf{d}^{(in)} = -\rho\,\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Div}\,T + d^{(ni)} = \rho\,\mathbf{a}$$ equazione della dinamica

equilibrio alla rotazione

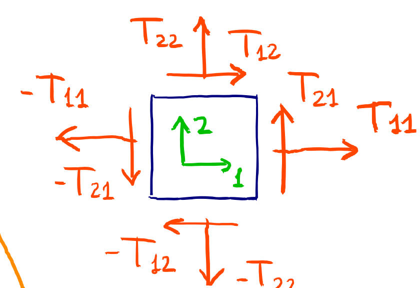
equil. per parti

$$(\square) \quad \underbrace{\mathbf{0} = \int_P (X-O) \times \mathbf{d} + \int_{\partial P} (X-O) \times \mathbf{c}} = -\int_P (X-O) \times (\mathrm{Div}\,T) + \int_{\partial P} (X-O) \times T n \qquad \forall P \subset B$$

$\Rightarrow$ $T = T^T \quad \forall X \in B \quad (T_{ij} = T_{ji})$

equil. puntuale

questo si può far vedere anche dall'equilibrio alla rotazione di un cubo di spigolo ε nel limite per $\varepsilon \to 0$, oppure di un parallelepipedo di spigoli dx, dy, dz (esercizio)



dimostrazione

$$(X-O) \times T n = (x_i \mathbf{e}_i) \times T n =$$

$$= e_{jkh}\, x_j (\mathbf{T}\mathbf{n})_k\, \mathbf{e}_h = \underbrace{e_{jkh}\, x_j\, T_{k\ell}\, n_\ell}_{= (An)_h}\, \mathbf{e}_h =$$

$$= An$$

$$A_{h\ell} := e_{jkh}\, x_j\, T_{k\ell}$$ indici saturati

$$\int_{\partial P} An = \int_P \mathrm{Div}\,A =$$

$$= \int_P A_{h\ell,\ell}\, \mathbf{e}_h = \int_P e_{jkh} \big(\underbrace{x_{j,\ell}}_{= \delta_{j\ell}} T_{k\ell} + x_j\, T_{k\ell,\ell} \big)\, \mathbf{e}_h =$$

$$= \int_P e_{\ell kh}\, T_{k\ell}\, \mathbf{e}_h + (X-O) \times (\mathrm{Div}\,T)$$

$$(\square) \Rightarrow \int_P e_{\ell kh}\, T_{k\ell}\, \mathbf{e}_h = \mathbf{0} \qquad \forall P \subset B$$

$$\Rightarrow e_{\ell kh}\, T_{k\ell}\, \mathbf{e}_h = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (T_{32} - T_{23})\, \mathbf{e}_1 + (T_{13} - T_{31})\, \mathbf{e}_2 + (T_{21} - T_{12})\, \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$