

Torsione $\xleftarrow{M_t} \xrightarrow{M_t}$

$T_{zz} = 0 \iff$ considerando
azioni sulle basi del
cilindro puramente
tangenziali

su una
sezione generica:

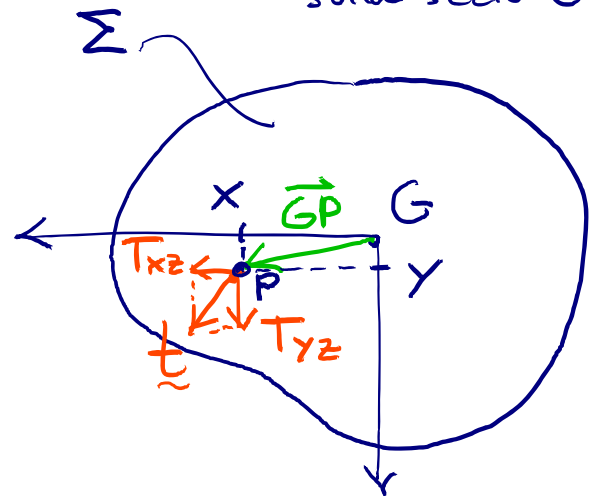
$$\underline{t} = \underline{T} \underline{e}_z = T_{xz} \underline{e}_x + T_{yz} \underline{e}_y =: \underline{t}_T$$

tensione
tangenziale
sulla sezione

$$M_T := \underline{m} \cdot \underline{e}_z =$$

$$= \underline{e}_z \cdot \int_{\Sigma} \overrightarrow{GP} \times \underline{t} =$$

$$= \underline{e}_z \cdot \int_{\Sigma} (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y) \times (T_{xz} \underline{e}_x + T_{yz} \underline{e}_y) dA$$



$$M_t = \int_{\Sigma} (x T_{yz} - y T_{xz}) dA$$

si vede anche
dalla figura

Invece di determinare le funzioni di forma
una volta per tutte, le sceglieremo a seconda
della tipologia della sezione.

(Situazione analoga a quella del caso di
taglio e flessione: è difficile soddisfare
la condizione sul contorno $\underline{t}_T \cdot \underline{n} = 0$ su $\partial \Sigma$.)

Sezione circolare di raggio r

si prende $\underline{c}_e = c_0(-y \underline{e}_x + x \underline{e}_y)$, $c_0 = \text{cost}$

forza di
contatto sulla
base $z = \ell$

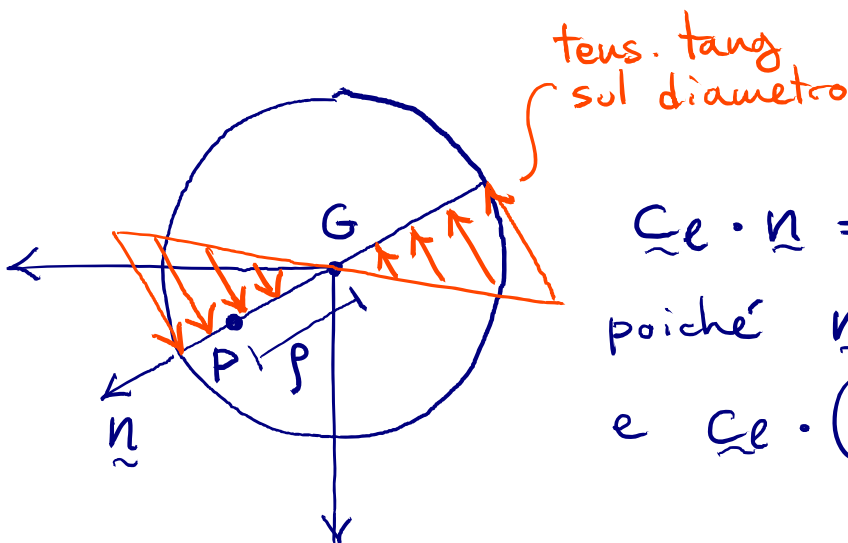
$$T_{xz} = \underline{c}_e \cdot \underline{e}_x = -c_0 y$$

$$T_{yz} = \underline{c}_e \cdot \underline{e}_y = c_0 x$$

$$M_t = c_0 \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dA = c_0 \underbrace{J_0}_{\text{mom. d'in. polare}}$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{M_t}{J_0}$$

$$(J_0 = \frac{1}{2} \pi r^4)$$



$\underline{c}_e \cdot \underline{n} = 0$ su $\partial \Sigma$ è soddisfatta
poiché $\underline{n} \parallel \overrightarrow{GP}$

$$\text{e } \underline{c}_e \cdot \underbrace{(x \underline{e}_x + y \underline{e}_y)}_{\overrightarrow{GP}} = 0$$

$\underline{c}_e$ è sempre
ortogonale
al raggio
vettore
(come $\underline{t}_\tau$)

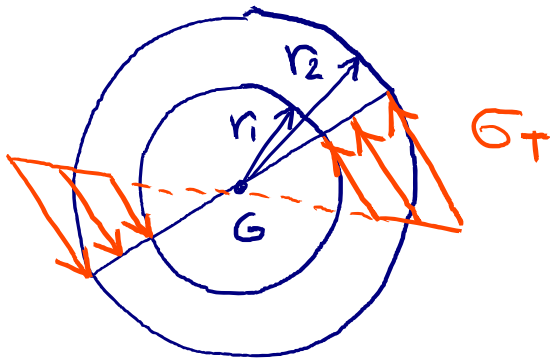
$$T_{xz} = -\frac{M_t}{J_0} y, \quad T_{yz} = \frac{M_t}{J_0} x$$

$$\sigma_\tau = \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2} = \frac{M_t}{J_0} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_t}{J_0} \rho$$

$$\max \sigma_\tau = \frac{M_t}{J_0} r = \frac{2 M_t}{\pi r^3}$$

Corona circolare

stesse formule, cambia solo $J_0 = \frac{1}{2} \pi (r_2^4 - r_1^4)$

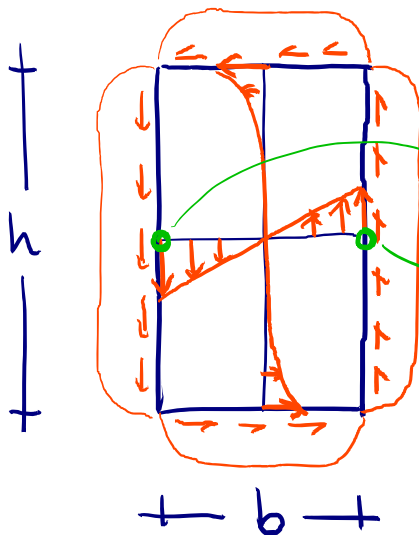


$$\sigma_T = \frac{M_T}{J_0} \rho$$

distanza da G

facoltative
sul libro

Le sezioni circolare, triangolare e ellittica sono le uniche per cui esiste una soluzione esatta in forma chiusa.

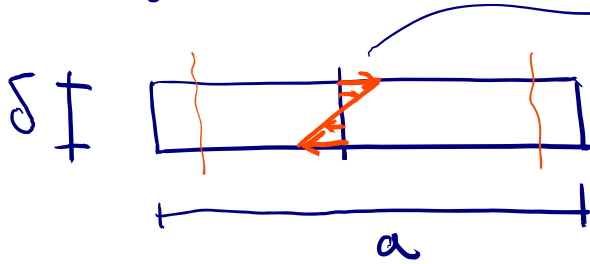
Sezione rettangolare

$$\max \sigma_T = c \left(\frac{h}{b} \right) \frac{M_t}{b^2 h}$$

coefficiente
adimensionale
che dipende dal
rapporto h/b

punti dove
la σ_T è
massima
(centro del lato lungo)

h/b	1	1.5	2	3	10	∞
c	4,8	4,3	4,1	3,8	3,2	3

Rettangolo sottile

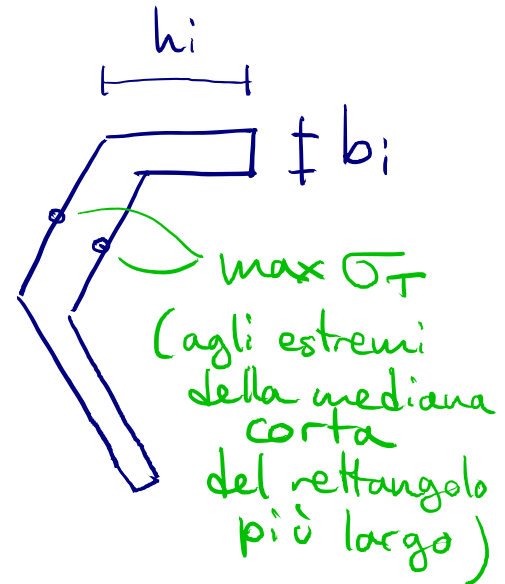
andamento
della tensione
tangenziale su
una corda qualsiasi
lungo lo spessore,
escluse le zone
terminali

$$\max \sigma_T = \frac{3 M_T}{\delta^2 a}$$

Sezione composta da rettangoli

$$\max \sigma_T = \frac{M_T b^*}{J^*}$$

$$b^* = \max_i b_i, \quad J^* = \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 h_i$$

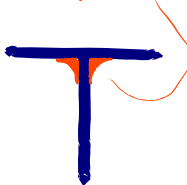


Valutazioni analogico - sperimentali (vedi libro)

— analogia della membrana

le curve di livello di una membrana tesa sottoposta a una pressione uniforme sono tangenti in ogni punto a $\underline{t}_T$, mentre $\sigma_T := |\underline{t}_T|$ è proporzionale alla pendenza della superficie deformata

raccordi
degli
spigoli



— analogia idrocinetica

il campo di velocità in un fluido in rotazione in condizioni stazionarie in un recipiente con la forma della sezione è proporzionale al campo $\underline{t}_T$

