

Nozione di TRAVE

Aspetto: corpo 3D con una dimensione prevalente sulle altre due

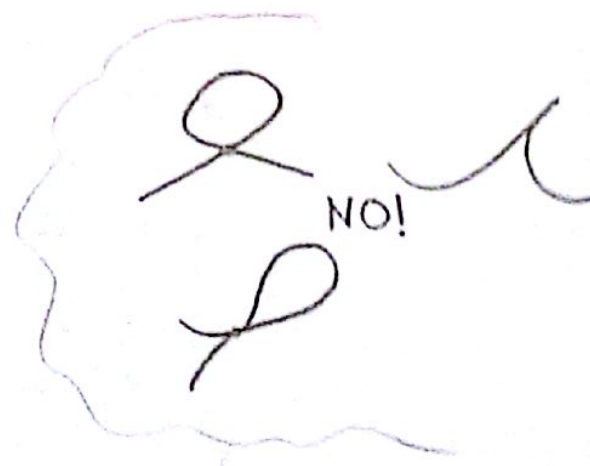
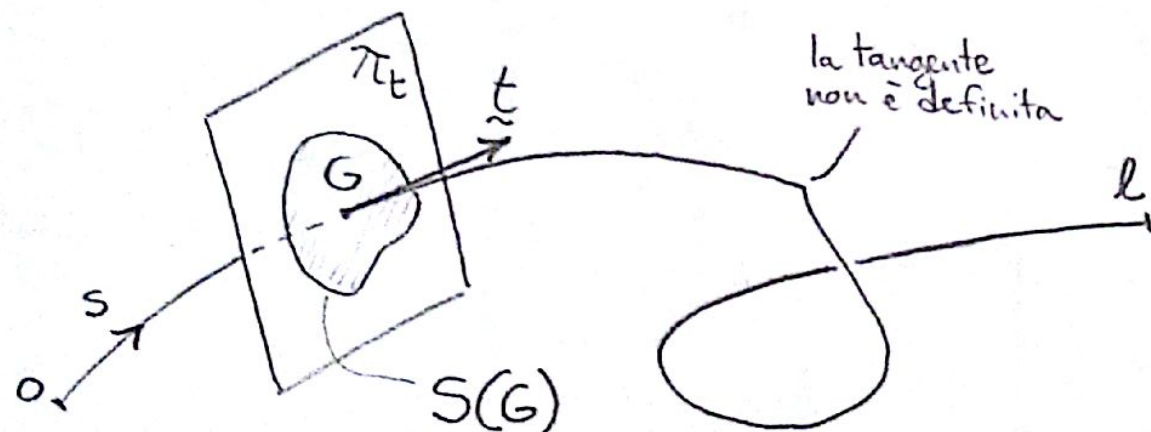
• Geometria

Sia $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ una curva regolare a tratti e semplice priva di cuspi,
autointersezioni,
autointersezioni
spazio euclideo 3D dotata di tangente quasi ovunque,
meno eventualmente un insieme
discreto di suoi punti

\mathcal{L} è orientata per valori crescenti dell'ascissa curvilinea s :

$$(\diamond) \quad [0, \ell] \ni s \mapsto G(s) \in \mathcal{L}, \quad \ell := \text{mis}(\mathcal{L})$$

lunghezza



π_t piano ortogonale a \underline{t} per $G \in \mathcal{L}$ (dove la tangente \underline{t} è ben definita)

* Applicazione che individua le sezioni trasversali;

$$(\spadesuit\spadesuit) \quad \mathcal{L} \ni G \mapsto \underbrace{S(G)}_{\text{insieme in } \pi_t} \subset \pi_t(G),$$

tale da soddisfare

(i) G baricentro di $S(G)$, $\int_{S(G)} \overrightarrow{GP} da = \underline{0} \quad (**)$

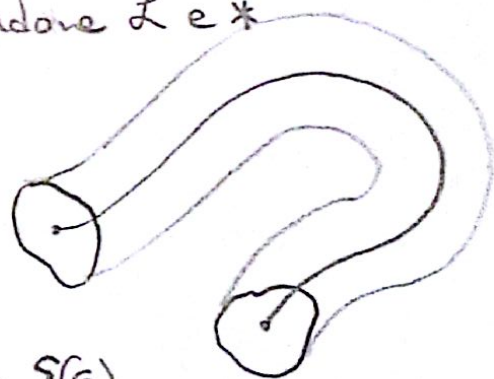
(ii) dato $T := \bigcup_{G \in \mathcal{L}} S(G)$, ogni $P \in T$ è ottenuto una sola volta (T non ha autocontatti)

(iii) T è sottile: $\sup_{G \in \mathcal{L}} \text{diam}(S(G)) \ll \text{mis}(\mathcal{L})$

$\hookrightarrow T$ è una regione 3D a forma di trave

\mathcal{L} asse della trave, $S(G)$ sezione trasversale in G geometricam. una trave è defin. assegnandone \mathcal{L} e *

OSS: 6 informaz. scalari per descrivere il piazzamento di un elemento $(G, S(G))$ di trave



OSS: (**) individua il baricentro in modo unico

Infatti, se G e \tilde{G} distinti ^{apparten. a $S(G)$} soddisfano (**)

$$\int_{S(G)} \overrightarrow{GP} da = \int_{S(G)} \overrightarrow{\tilde{G}P} da \Rightarrow \int_{S(G)} (\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{P\tilde{G}}) da = \int_{S(G)} \overrightarrow{G\tilde{G}} da =$$

OSS: (ii) \Rightarrow ogni $P \in T$ appartiene ad una sola sezione

$$= \overrightarrow{G\tilde{G}} \left(\int da \right) = 0$$

OSS: T immagine di $s \mapsto S(G(s))$

$$\Rightarrow \overrightarrow{G\tilde{G}} = 0 \quad \text{assurdo}$$

data T , ci può essere più di un modo di associare (\spadesuit) e $(\spadesuit\spadesuit)$

• Cinematica

Corpi allungati reali sotto carico, deformazioni complesse

Nel modello di trave, descrizione sommaria
delle deformazioni

→ due campi vettoriali definiti su \mathcal{L} :

$$\underline{u}(G), \underline{\varphi}(G)$$

spostamento
di $G \in \mathcal{L}$

rotazione attorno a G
del piano della sezione
 $\pi_t(G)$

Le equazioni che determinano \underline{u} e $\underline{\varphi}$ nel caso
di travi elastiche saranno dedotte dopo aver
rimosso l'ipotesi di indeformabilità dal modello

Atto di moto locale: $\underline{v}(G), \underline{\omega}(G)$

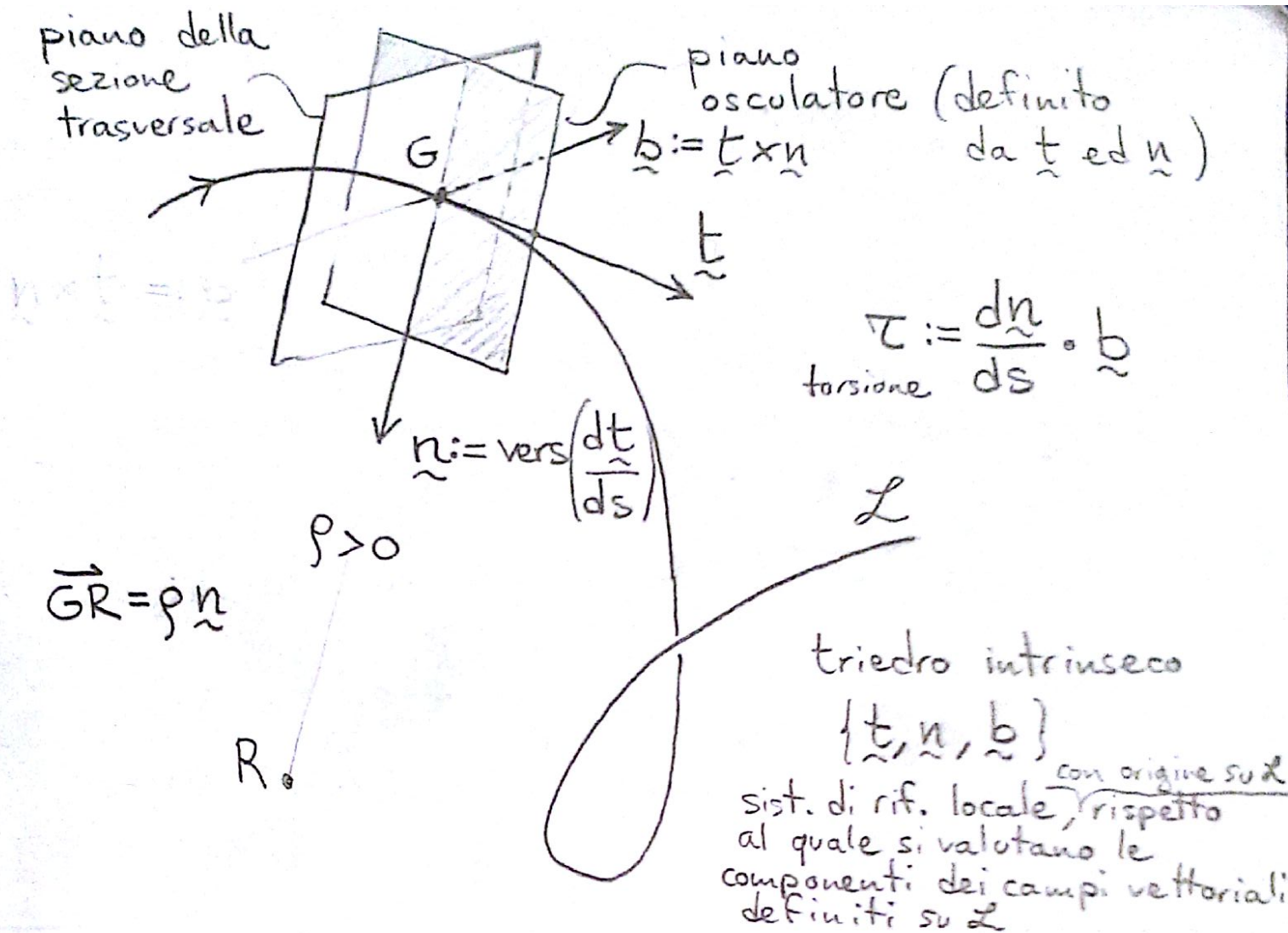
velocità
dell'asse

velocità angolare
della sezione
(corpo rigido piano
che ruota attorno a G)

Per descrivere

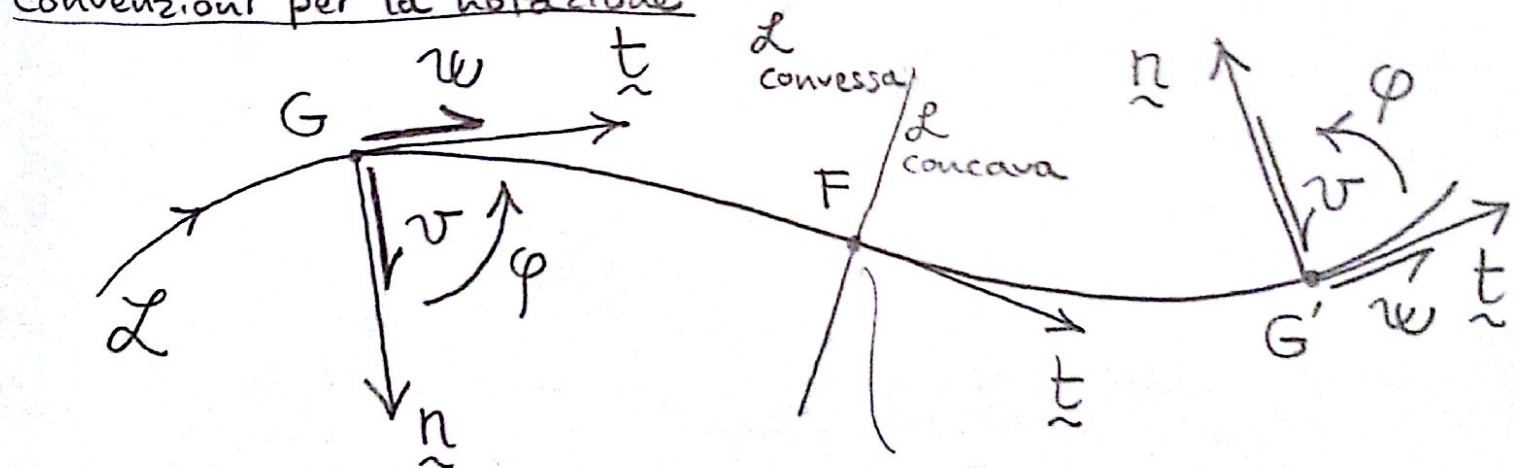
la potenza spesa in un atto di moto occorrono

due campi vettoriali di natura dinamica
coniugati con \underline{v} e $\underline{\omega}$



Trave piana : 3 parametri necessari a descrivere le deformazioni 2 + 1

Convenzioni per la notazione



pt. di convessità :

$$\underline{u} = w \underline{t} + v \underline{n}, \quad \varphi = -\varphi \underline{t} \times \underline{n}$$

pt. di concavità :

$$\underline{u} = w \underline{t} - v \underline{n}, \quad \varphi = \varphi \underline{t} \times \underline{n}$$

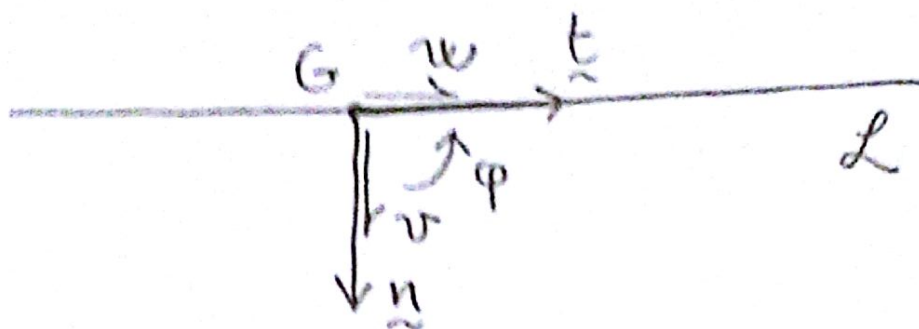
\underline{t} non è

differenziabile

\underline{n} e \underline{b} hanno un salto

Analoga descrizione dell'atto di moto locale

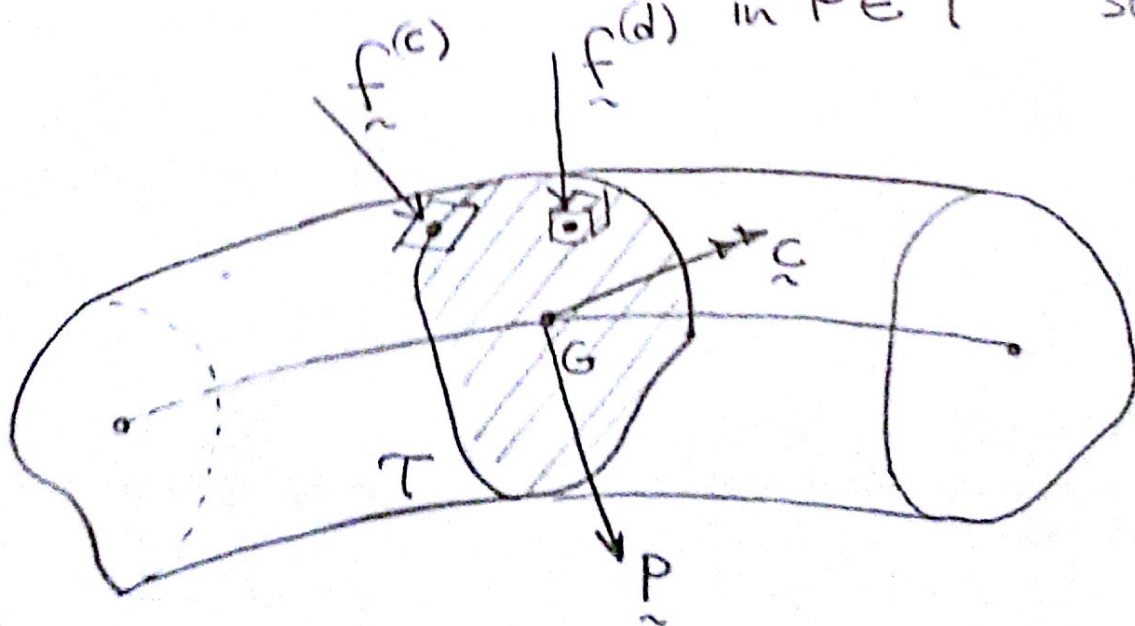
Trave piana ad asse rettilineo



$$\underline{u} = w \underline{t} + v \underline{n}, \quad \varphi = -\varphi \underline{t} \times \underline{n}$$

• Carichi applicati

Due tipi di forze esterne: $\underline{f}^{(d)}$ a distanza in $P \in T$, $\underline{f}^{(c)}$ di contatto su $P \in \partial T$



Descrizione sommaria

Riduzione per equipollenza delle distribuzioni di $f^{(d)}$ e $f^{(c)}$ ai punti dell'asse

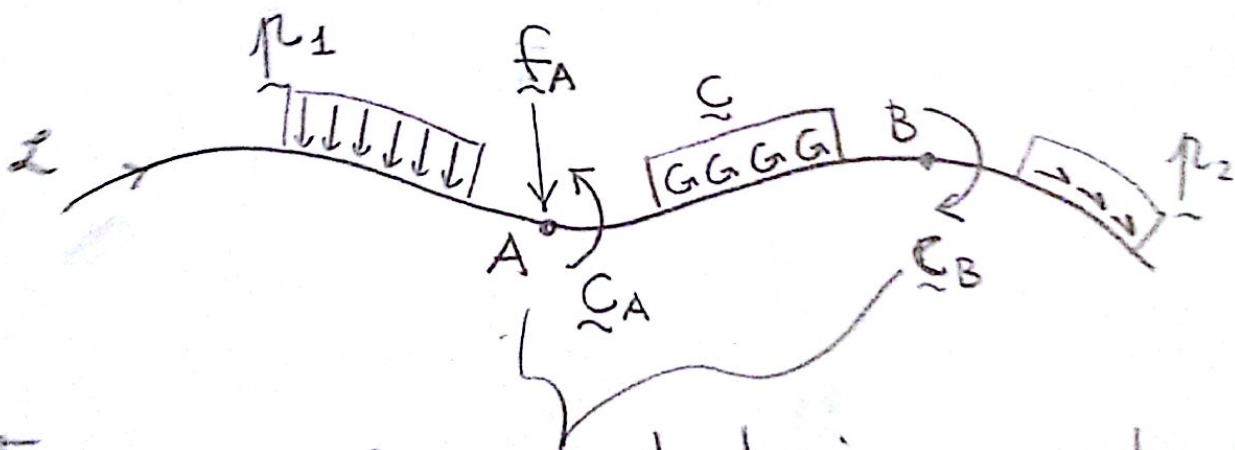
$$\underline{p}(G) = \underline{p}^{(d)} + \underline{p}^{(c)} = \int_{S(G)} f^{(d)} da + \int_{\partial S(G)} f^{(c)} dl$$

$$\underline{c}(G) = \underline{c}^{(d)} + \underline{c}^{(c)} = \int_{S(G)} \vec{GP} \times f^{(d)} da + \int_{\partial S(G)} \vec{GP} \times f^{(c)} dl$$

\underline{p} e \underline{c} sono le distribuzioni sull'asse
di forze e coppie per unità di lunghezza

$$\dim(f^{(d)}) = FL^{-3}, \quad \dim(f^{(c)}) = FL^{-2},$$

$$\dim(\underline{p}) = FL^{-1} \quad \dim(\underline{c}) = F$$



Forze e coppie concentrate in un punto dell'asse
dovute a distrib. di forze per unità di lunghezza
sul contorno di una specifica sezione

Convenzione sulla notazione

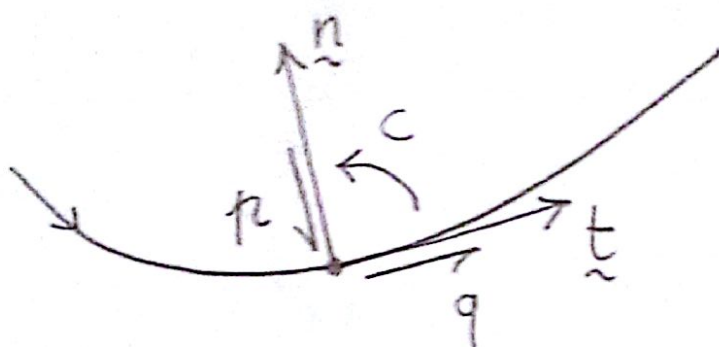
Travi piane

pt. di convessità $\underline{p} = q\underline{t} + r\underline{n}$, $\underline{c} = -c\underline{t} \times \underline{n}$

pt. di concavità $\underline{p} = q\underline{t} - r\underline{n}$, $\underline{c} = c\underline{t} \times \underline{n}$

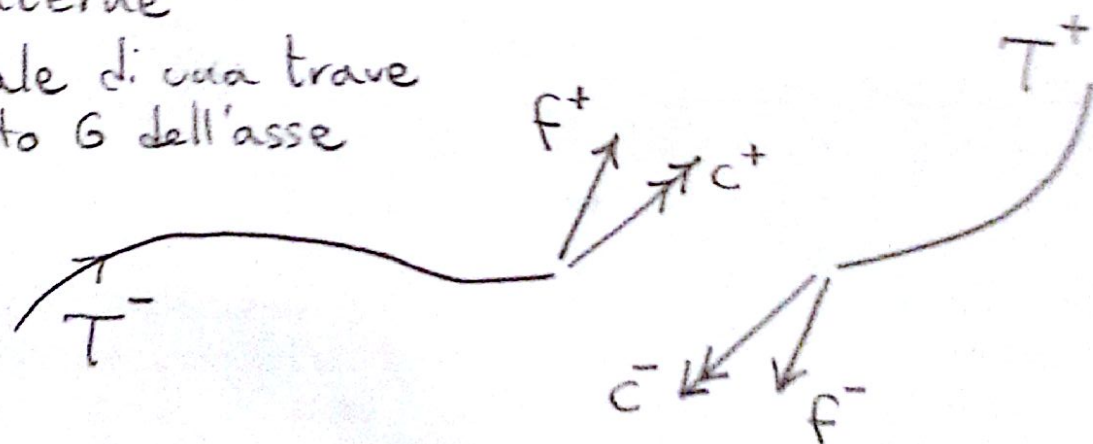
Travi ad asse rettilineo

$$\underline{p} = q\underline{t} + r\underline{n}, \quad \underline{c} = -c\underline{t} \times \underline{n}$$



Azioni interne

Taglio ideale di una trave
in un punto G dell'asse



$(\underline{f}, \underline{c})^+$ azioni interne che T^+ esercita su T^-

$(\underline{v}, \underline{\omega})$ atto di moto di $S(G)$

Condizione di potenza nulla in ogni atto di moto

$$\underline{f}^+ \cdot \underline{v} + \underline{c}^+ \cdot \underline{\omega} + \underline{f}^- \cdot \underline{v} + \underline{c}^- \cdot \underline{\omega} = 0 \quad \forall \underline{v}, \underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{f}^+ + \underline{f}^- = \underline{0}, \quad \underline{c}^+ + \underline{c}^- = \underline{0}$$

PRINCIPIO DI
AZIONE E
REAZIONE

Il ruolo delle azioni interne è quello di trasmettere per equipollenza lungo l'asse della trave l'effetto dei carichi esterni.

Calcolo: riduzione per equipollenza al polo G del sistema di forze e coppie su \mathcal{L}^+

Nota: ^{sistema} bilanciato (forze esterne e reazioni vincolari) (cioè di tutte le azioni su \mathcal{T})

$$\underline{r}^+ + \underline{r}^- = \underline{0}$$

$$\underline{c}^+ + \underline{c}^- = \underline{0}$$

$$\underline{f}^+ = \underline{r}^+ , \quad \underline{c}^+ = \underline{m}^+(G)$$

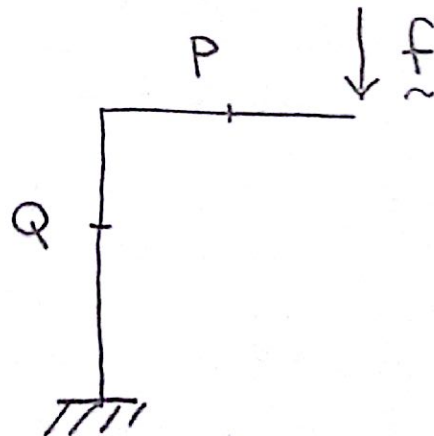
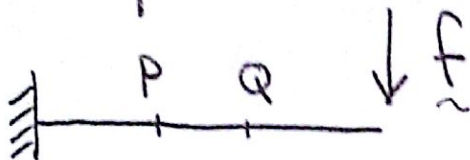
analogamente $\underline{f}^- = \underline{r}^- , \quad \underline{c}^- = \underline{m}^-(G)$

(oppure) bilancio di tutte le azioni, interne ed esterne, agenti su \mathcal{L}^+

$$\underline{r}^+ + \underline{f}^- = \underline{0} , \quad \underline{c}^+ + \underline{m}^-(G) = \underline{0}$$

analogamente $\underline{r}^- + \underline{f}^+ = \underline{0} , \quad \underline{c}^- + \underline{m}^+(G) = \underline{0}$

Esempi



Caratteristiche della sollecitazione $\underline{r} = \underline{r}^+$, $\underline{m} = \underline{m}^+$
componenti nel triedro intrinseco dei vettori;
 $\underline{r}^+(G)$, $\underline{m}^+(G)$

$$\underline{r} = \underline{r}^+ = \underline{f}^+ = -\underline{r}^- = -\underline{f}^-$$

$$\underline{r} = \underline{m}^+ = \underline{c}^+ = -\underline{m}^- = -\underline{c}^-$$

$$N := \underline{r}^+ \cdot \underline{t}$$

$$T_t := \underline{r}^+ \cdot \underline{n}$$

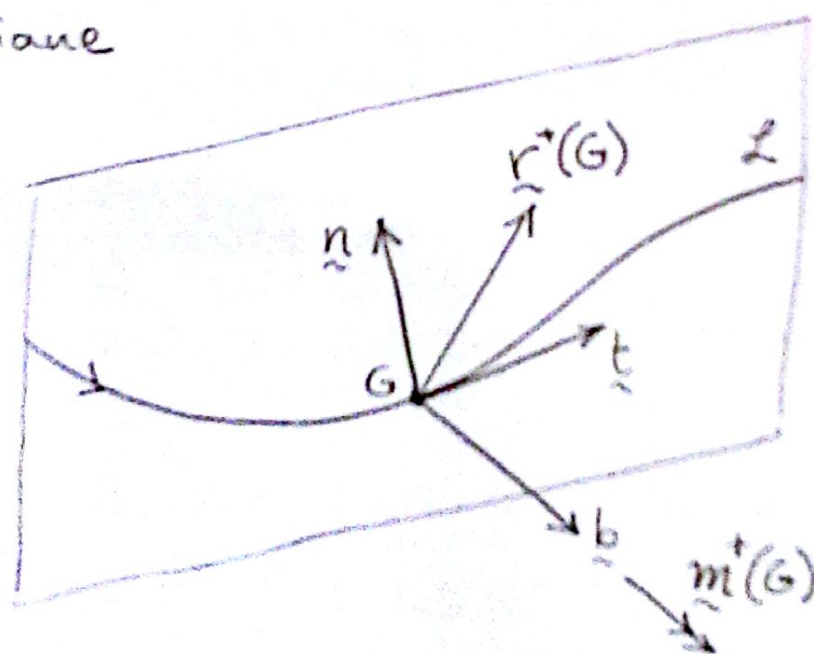
$$T_b := \underline{r}^+ \cdot \underline{b}$$

$$M_t := \underline{m}^+ \cdot \underline{t}$$

$$M_n := \underline{m}^+ \cdot \underline{n}$$

$$M_b := \underline{m}^+ \cdot \underline{b}$$

Travi piane



$$\underline{r}^+ \cdot \underline{b} = 0$$

$$\underline{m}^+ \times \underline{b} = 0$$

$$T_b = 0$$

$$M_n = 0$$

$$M_t = 0$$

$$\underline{r} \equiv (N, T, 0) \quad , \quad \underline{m} \equiv (0, 0, M) \quad \text{pt. di convessità}$$

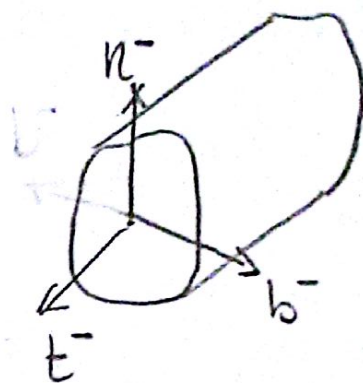
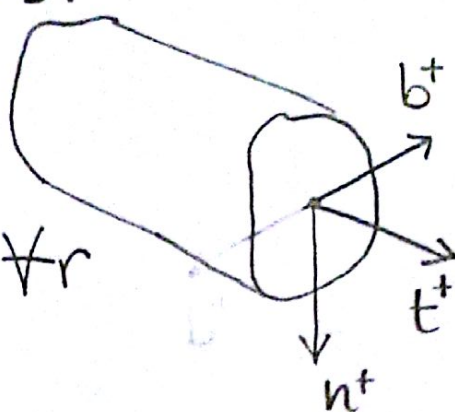
$$\underline{r} \equiv (N, -T, 0) \quad , \quad \underline{m} \equiv (0, 0, M) \quad \text{pt. di concavità}$$

Calcolo delle c. d. s.

$$\underline{f}^+ \cdot \underline{t}^+ = N = \underline{f}^- \cdot \underline{t}^- \quad \forall \underline{r}$$

$$\Rightarrow \underline{r} \cdot (\underline{t}^+ + \underline{t}^-) = 0 \quad \forall \underline{r}$$

$$\Rightarrow \underline{t}^+ = -\underline{t}^-$$



Le c.d.s. si possono calcolare sia "guardando a sinistra" che "guardando a destra" della sezione di interesse.

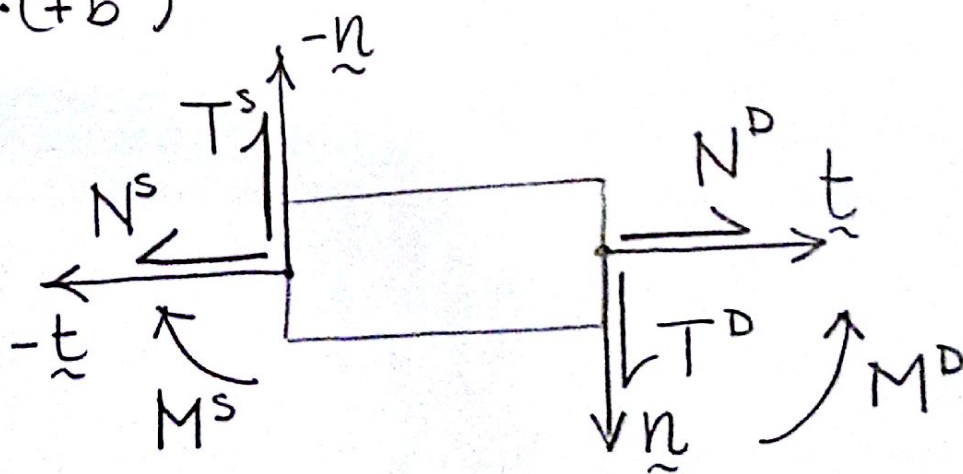
Sia nella progettazione che nelle verifiche di resistenza di una travatura è indispensabile tracciare i grafici delle c.d.s. in funzione di s

$$N = \underline{f}^+ \cdot \underline{t}^+ = \underline{f}^- \cdot (-\underline{t}^+)$$

$$T = \underline{f}^+ \cdot \underline{n}^+ = \underline{f}^- \cdot (-\underline{n}^+)$$

$$M = \underline{c}^+ \cdot (-\underline{b}^+) = \underline{c}^- \cdot (+\underline{b}^+)$$

Asse rettilineo



Equilibrio puntuale di travi ad asse rettilineo

$$N(s+ds) - N(s) + q^{(s)} ds = 0$$

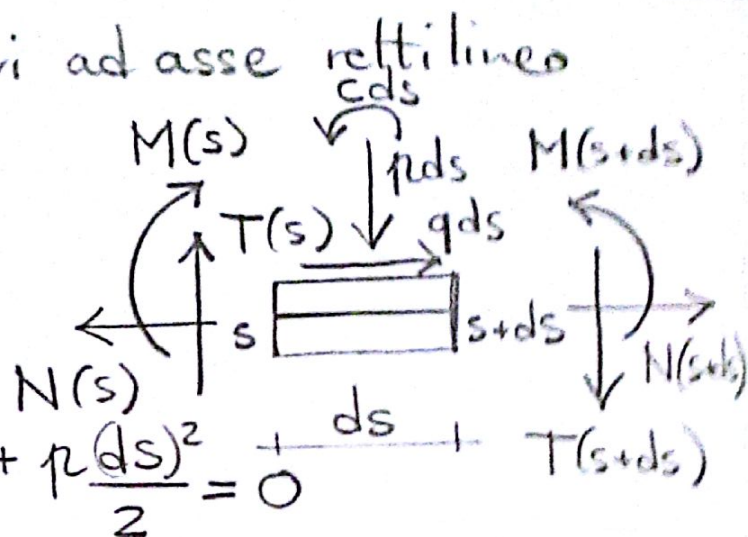
$$T(s+ds) - T(s) + p^{(s)} ds = 0$$

$$M(s+ds) - M(s) - T(s)ds + cds + p \frac{(ds)^2}{2} = 0$$

$$N' + q = 0$$

$$T' + p = 0$$

$$M' - T + c = 0$$



$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

Per integrazione $s_0 < s < s_1$

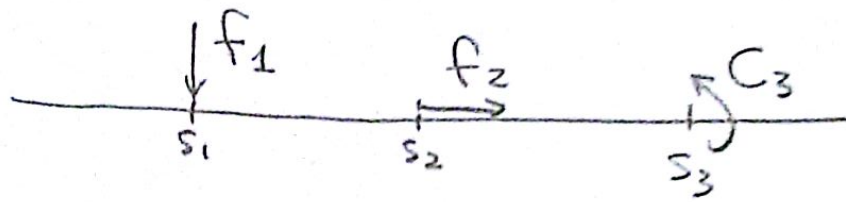
$$N(s) = N(s_0) - \int_{s_0}^s q(t) dt$$

$$T(s) = T(s_0) - \int_{s_0}^s p(t) dt$$

$$M(s) - M(s_0) - \int_{s_0}^s T(s_0) dt + \int_{s_0}^s \left(\int_{s_0}^z p(t) dt \right) dz + \int_{s_0}^s c(t) dt = 0$$

$$M'' = T' - c' = -p - c'$$

Carichi concentrati



$$[N]_{s=s_2} = -f_2$$

$$[T]_{s=s_1} = -f_1$$

$$[M]_{s=s_3} = -C_3$$