

Travi e Travature Piane ad Asse Rettilineo

5

In questo capitolo studieremo un particolare tipo di corpo rigido, la *trave*, che costituirà l'elemento meccanico di base di una classe di sistemi corpi rigidi di particolare interesse, ovvero le *travature*. Le catene cinematiche piane di travi studiate nel capitolo precedente non sono che uno dei molti tipi di travatura rigida che si incontrano nelle applicazioni.

Nella trattazione che compiremo, la limitazione di indeformabilità verrà rimossa più avanti; sin dall'inizio tuttavia, prenderemo in esame travi *piane* ad asse rettilineo. Generalizzazioni a travi ad asse curvilineo ed eventualmente non piane verrà fatta in seguito, ma non in questo testo.

5.1 Nozione di trave

Abbiamo già avuto a che fare con travi, senza precisare i caratteri meccanici del modello relativo, se non per l'introduzione della nomenclatura relativa alla geometria (*asse*, *sezione trasversale*). Colmiamo questa lacuna, proponendoci di mettere in chiaro quale sia la classe di oggetti reali, del cui comportamento meccanico il modello trave intende dar conto. Anzitutto, quanto all'aspetto, vogliamo considerare *corpi sostanzialmente allungati*, cioè, corpi tridimensionali con una dimensione prevalente sulle altre due. Cominciamo quindi con una descrizione precisa del tipo di regioni di spazio occupate da corpi di questo genere.

5.1.1 Geometria

Pensiamo di scegliere, nello spazio euclideo tridimensionale \mathcal{E} , una curva \mathcal{L} *piana*, *rettilinea*, *regolare a tratti* (cioè, dotata di tangente quasi ovunque, meno eventualmente in un insieme discreto di suoi punti) e *semplice* (cioè, priva di cappi, cuspidi, autocontatti e autointersezioni) (Fig. 5.1); di orientare \mathcal{L} per

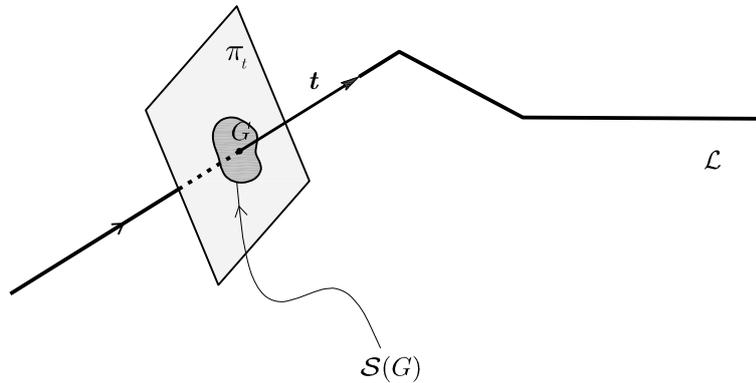


Figura 5.1

valori crescenti dell'ascissa curvilinea s :

$$[0, l] \ni s \mapsto G(s) \in \mathcal{L}, \quad l := \text{mis}(\mathcal{L}); \quad (5.1)$$

e di indicare con $\pi_{\mathbf{t}}(G)$ il piano ortogonale a \mathbf{t} passante per un punto $G \in \mathcal{L}$ dove la tangente \mathbf{t} è ben definita. Pensiamo poi di definire su \mathcal{L} l'applicazione

$$G \mapsto \mathcal{S}(G) \subset \pi_{\mathbf{t}}(G), \quad (5.2)$$

che per valori ha insiemi, in modo tale che:

(i) G sia il *baricentro* di $\mathcal{S}(G)$, vale a dire, il punto di $\mathcal{S}(G)$ determinato dalla condizione integrale

$$\int_{\mathcal{S}(G)} \overrightarrow{GP} \, da = \mathbf{0}; \quad (5.3)$$

(ii) ciascun punto dell'intorno tridimensionale di \mathcal{L}

$$\mathcal{T} := \bigcup_{G \in \mathcal{L}} \mathcal{S}(G) \quad (5.4)$$

sia ottenuto una sola volta (frontiera inclusa, di modo che la regione tubolare \mathcal{T} non presenti autocontatti);

(iii) \mathcal{T} sia *sottile*, nel senso che

$$\sup_{G \in \mathcal{L}} \text{diam}(\mathcal{S}(G)) \ll \text{mis}(\mathcal{L}).$$

Quando tutte queste condizioni sono soddisfatte, diciamo che \mathcal{T} è una *regione tridimensionale a forma di trave*, della quale la curva \mathcal{L} è l'*asse* e gli insiemi piani $\mathcal{S}(G)$, $G \in \mathcal{L}$, sono le *sezioni trasversali*.

OSSERVAZIONI. 1. Dal punto di vista geometrico, una *trave piana* è definita formalmente assegnandone, con le cautele sopra indicate, la linea d'asse \mathcal{L} e

l'applicazione che ne individua le sezioni trasversali. Servono quindi di regola 3 informazioni scalari per descrivere il piazzamento di un elemento $(G, \mathcal{S}(G))$ di trave: 2 per collocare nello spazio il punto G , e un'altra per collocare rispetto al proprio baricentro G la sezione $\mathcal{S}(G)$, riguardata come un corpo rigido piano.

2. È facile dimostrare per assurdo che la condizione (5.3) individua il baricentro in modo unico: se due punti distinti $G, \tilde{G} \in \mathcal{S}(G)$ la soddisfacessero entrambi, allora

$$\int_{\mathcal{S}(G)} \overrightarrow{GP} da = \int_{\mathcal{S}(G)} \overrightarrow{\tilde{G}P} da \Rightarrow \left(\int_{\mathcal{S}(G)} da \right) \overrightarrow{GG} = \mathbf{0} \Rightarrow \overrightarrow{GG} = \mathbf{0}, \text{ abs..}$$

3. La condizione (ii) implica che ogni punto della regione tubolare \mathcal{T} appartenga a una sola sezione.

4. Date le applicazioni (5.1) e (5.2), \mathcal{T} si può vedere come l'immagine dell'intervallo $[0, l]$ restituita dall'applicazione composta $s \mapsto \mathcal{S}(G(s))$. Per converso, data una regione a forma di trave, ci può essere più di un modo per associare con essa due applicazioni del tipo di (5.1) e (5.2).

5.1.2 Cinematica

I corpi allungati reali si deformano in modo alquanto complesso sotto l'azione dei carichi che li sollecitano. È parte integrante della nozione di trave l'accettare una descrizione sommaria di tali deformazioni, consistente nella specificazione di due soli campi vettoriali definiti su \mathcal{L} : lo *spostamento* $\mathbf{u}(G)$ di un punto tipico G dell'asse e la *rotazione* $\varphi(G)$ attorno a G del piano $\pi_t(G)$ della sezione. La deduzione di equazioni che determinano tali campi nel caso di travi elastiche sarà compiuta dopo aver rimosso l'ipotesi di indeformabilità. Per adesso, ci basta stabilire che, per descrivere l'*atto di moto* locale di una trave, servono due vettori: $\bar{\mathbf{u}}(G)$, che specifica la *velocità dell'asse*, e $\bar{\varphi}(G)$, che specifica la *velocità angolare della sezione*, intesa come un corpo rigido piano che ruota attorno a G . Si intuisce quindi come la descrizione della potenza spesa in un atto di moto debba coinvolgere due campi vettoriali di natura dinamica, l'uno coniugato con $\bar{\mathbf{u}}(G)$, l'altro con $\bar{\varphi}(G)$; introdurremo questi descrittori dinamici nella Sezione 5.2.

Denominando \mathbf{n} la normale all'asse della trave, rivolta verso il basso, porremo:

$$\mathbf{u} = w\mathbf{t} + v\mathbf{n} \quad \& \quad \varphi = -\varphi\mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (5.5)$$

per i campi di spostamento e rotazione (Fig. 5.2), mentre la rappresentazione del generico atto di moto è:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{w}\mathbf{t} + \bar{v}\mathbf{n} \quad \& \quad \bar{\varphi} = -\bar{\varphi}\mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (5.6)$$

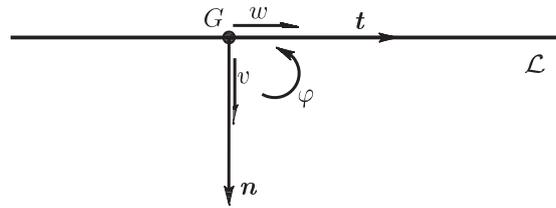


Figura 5.2

5.1.3 Carichi applicati

Una trave reale è soggetta a *forze esterne* di due tipi: quelle *a distanza* $\mathbf{f}^{(d)}$, che agiscono nei punti interni alla regione tubolare \mathcal{T} che la trave occupa, e quelle *di contatto* $\mathbf{f}^{(c)}$, che agiscono sulla frontiera $\partial\mathcal{T}$ di \mathcal{T} . Nel modello di trave, di queste forze si dà una descrizione sommaria procedendo alla *riduzione per equipollenza* delle distribuzioni di $\mathbf{f}^{(d)}$ e $\mathbf{f}^{(c)}$ ai punti dell'asse, nel modo mostrato con l'aiuto delle figure seguenti:

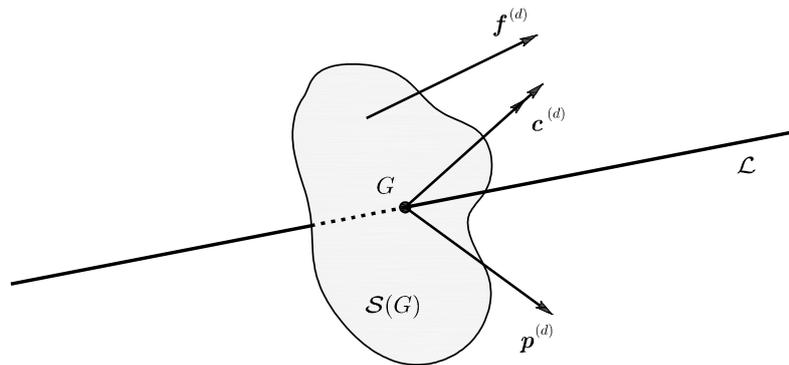


Figura 5.3

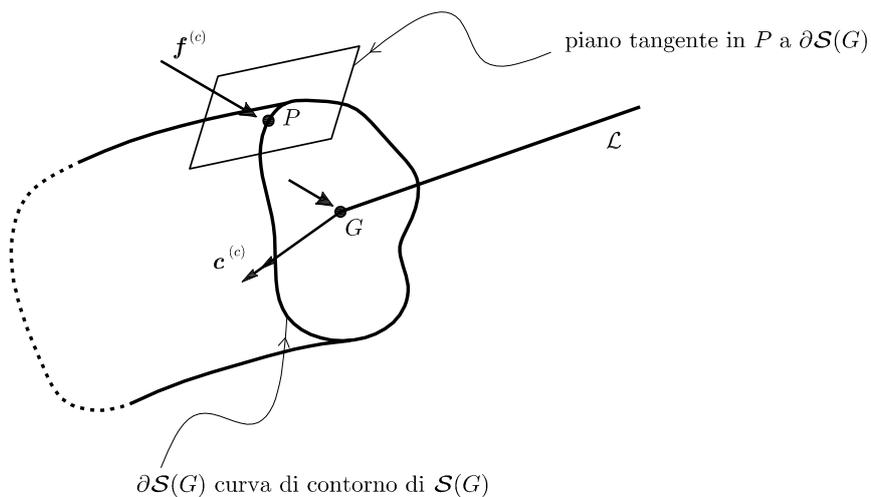


Figura 5.4

dove

$$\mathbf{p}^{(d)}(G) = \int_{S(G)} \mathbf{f}^{(d)} da, \quad \mathbf{c}^{(d)}(G) = \int_{S(G)} \overrightarrow{GP} \times \mathbf{f}^{(d)} da;$$

$$\mathbf{p}^{(c)}(G) = \int_{\partial S(G)} \mathbf{f}^{(c)} dl, \quad \mathbf{c}^{(c)}(G) = \int_{\partial S(G)} \overrightarrow{GP} \times \mathbf{f}^{(c)} dl.$$

Le dimensioni di $\mathbf{f}^{(d)}$ e $\mathbf{p}^{(c)}$ sono, rispettivamente, $F(\text{orza}) \times L(\text{unghezza})^{-3}$ e $F \times L^{-2}$; di conseguenza, sia $\mathbf{p}^{(d)}$ che $\mathbf{p}^{(c)}$ hanno dimensioni $F \times L^{-1}$, mentre $\dim(\mathbf{c}^{(d)}) = \dim(\mathbf{c}^{(c)}) = F$. Indicheremo con

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(d)} + \mathbf{p}^{(c)}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^{(d)} + \mathbf{c}^{(c)}$$

le distribuzioni sull'asse di *forze e coppie esterne per unità di lunghezza*. Quelle distribuzioni di forze di contatto esterne che interessano una porzione di $\partial\mathcal{T}$ corrispondente ad un tratto molto piccolo di linea d'asse (in particolare, le distribuzioni di forze per unità di lunghezza sul contorno di una specifica sezione trasversale) possono essere convenientemente ridotte all'asse come *forze e coppie esterne concentrate* in un punto dell'asse medesimo.

Lo scopo della Fig. 5.5 è visualizzare in modo sintetico i vari risultati possibili dell'operazione di riduzione:

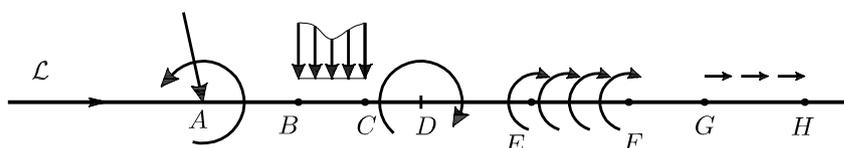


Figura 5.5

la forza in A è concentrata, le forze sui tratti da B a C e da G a H diffuse; in A e in D agisce una coppia concentrata, sul tratto da E a F una coppia diffusa (\equiv per unità di lunghezza dell'asse). La forza e la coppia concentrate in A vanno intese come il risultato del trasporto in A di una distribuzione di forze di contatto su una porzione di $\partial\mathcal{T}$ corrispondente a un intorno molto piccolo di A su \mathcal{L} .

OSSERVAZIONE.

Per travi piane ad asse rettilineo, useremo la notazione seguente:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{t} + p\mathbf{n} \quad \& \quad \mathbf{c} = -c\mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad (5.7)$$

coerentemente con le relazioni (5.5).

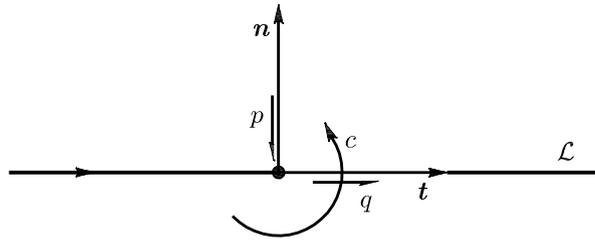


Figura 5.6

5.2 Azioni interne in una trave

Pensiamo di eseguire un taglio ideale di una trave \mathcal{T} in un punto G del suo asse e indichiamo con $(\mathbf{f}, \mathbf{c})^+$ le *azioni interne*, consistenti in una forza \mathbf{f}^+ e una coppia \mathbf{c}^+ , che la porzione di destra \mathcal{T}^+ esercita in G sulla porzione di sinistra \mathcal{T}^- ; analogamente, indichiamo con $(\mathbf{f}, \mathbf{c})^-$ le azioni interne che \mathcal{T}^- esercita in G su \mathcal{T}^+ (Fig. 5.7).

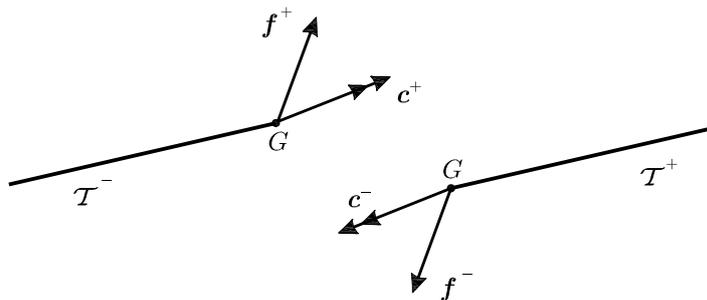


Figura 5.7

In un atto di moto di \mathcal{T} , sia $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\varphi})$ la coppia costituita dalla velocità $\bar{\mathbf{u}}$ di G e dalla velocità angolare $\bar{\varphi}$ della sezione trasversale per G . Poichè le azioni $(\mathbf{f}, \mathbf{c})^+$ e $(\mathbf{f}, \mathbf{c})^-$ sono interne, è ragionevole caratterizzarle nel complesso mediante una *condizione di potenza nulla*:

$$\mathbf{f}^+ \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{c}^+ \cdot \bar{\varphi} + \mathbf{f}^- \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{c}^- \cdot \bar{\varphi} = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}, \bar{\varphi}. \quad (5.1)$$

Si vede facilmente che questa condizione, che può anche essere scritta nella forma

$$(\mathbf{f}^+ + \mathbf{f}^-) \cdot \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{c}^+ + \mathbf{c}^-) \cdot \bar{\varphi} = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}, \bar{\varphi},$$

equivale a richiedere che

$$\mathbf{f}^+ + \mathbf{f}^- = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^+ + \mathbf{c}^- = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Le ultime due relazioni integrano, nella versione appropriata alle travi, il

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE. Se si divide in due parti una trave \mathcal{T} mediante un taglio ideale, l'azione esercitata dalla parte \mathcal{T}^+ sulla parte \mathcal{T}^- è uguale e contraria alla reazione esercitata da \mathcal{T}^- su \mathcal{T}^+ .

Il ruolo delle azioni interne è quello di *trasmettere per equipollenza* lungo l'asse di una trave l'effetto dei carichi esterni. Operativamente, le azioni interne si calcolano in due modi concettualmente del tutto equivalenti: riducendo al polo G il sistema di forze e coppie applicate alla parte \mathcal{L}^+ dell'asse, cioè, di tutte le forze che l'ambiente esterno (vincoli compresi) esercita sulla parte \mathcal{T}^+ della trave, si ottiene $(\mathbf{f}, \mathbf{c})^+$, dove \mathbf{f}^+ è pari al *risultante* \mathbf{R} , e \mathbf{c}^+ al *momento risultante* \mathbf{M} rispetto a G del sistema di forze e coppie esterne applicate a \mathcal{L}^+ ; ma è anche vero, in forza del Principio di Azione e Reazione, che si possono calcolare risultante e momento risultante riducendo per equipollenza a G il sistema di forze e coppie applicate alla parte \mathcal{L}^- dell'asse. Insomma,

$$\begin{cases} \mathbf{R} := \mathbf{f}^+ = -\mathbf{f}^- \\ \mathbf{M} := \mathbf{c}^+ = -\mathbf{c}^- \end{cases}, \quad G \in \mathcal{L}. \quad (5.3)$$

5.2.1 Esempi di calcolo

Consideriamo prima una trave a mensola soggetta ad un carico verticale posto nell'estremo libero da vincoli (Fig. 5.8). Supponiamo di tagliare idealmente la trave, prima nel punto P poi nel punto Q , e analizziamo le azioni che la porzione

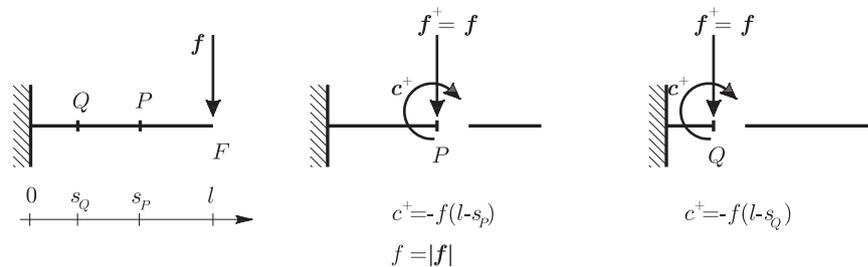


Figura 5.8

\mathcal{T}^+ esercita su \mathcal{T}^- nei due casi. Tanto in P che in Q , l'azione interna della forza esterna consiste in un sistema di una forza e una coppia: in P , di una forza pari a \mathbf{f} e di una coppia \mathbf{c} di intensità $|\mathbf{f}|(l - s_P)$; in Q , ancora di una forza pari a \mathbf{f} e di una coppia di intensità $|\mathbf{f}|(l - s_Q)$. Si vede dunque che le azioni interne possono variare lungo l'asse di una trave: qui, ad esempio, la coppia interna varia linearmente.

Consideriamo adesso la travatura di Fig. 5.9. Qui il modulo della coppia \mathbf{c} cresce linearmente lungo il tratto orizzontale dell'asse, mentre è costante lungo quello verticale. D'altra parte la forza esterna \mathbf{f} produce effetti diversi nei tratti orizzontale e verticale: nel primo, esercita un'azione perpendicolare all'asse, che tende a far traslare e ruotare le parti \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- di trave l'una rispetto all'altra;

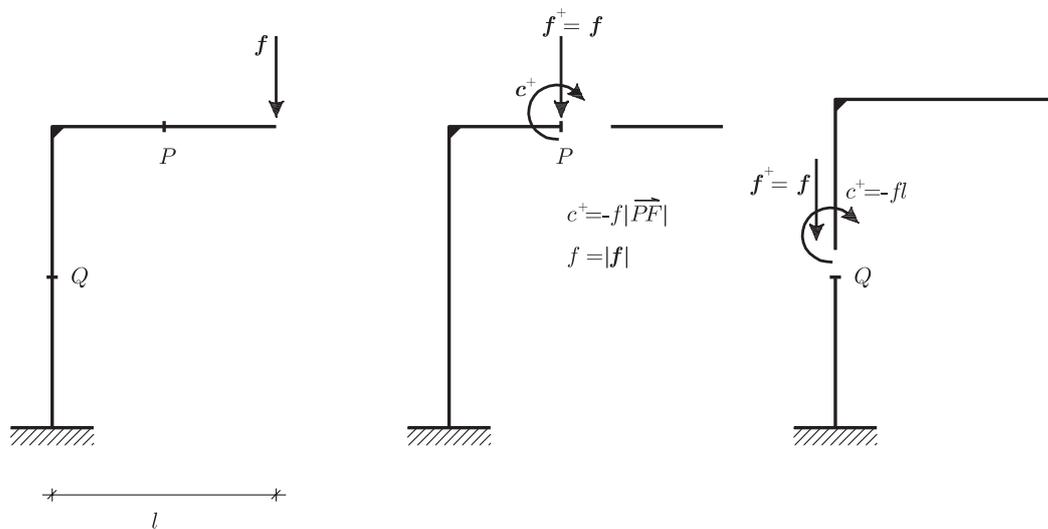


Figura 5.9

nel secondo, esercita un'azione parallela all'asse, che tende a far compenetrare le parti \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- .

Questi ed altri tipi di azione interna sono ben descritti mediante la nozione di caratteristiche della sollecitazione, che introdurremo nella prossima sezione.

5.3 Caratteristiche di sollecitazione

Il cimento interno che le azioni esterne inducono in una trave, sezione per sezione, è misurato in dettaglio dalle *caratteristiche di sollecitazione*: per definizione, in un punto G dell'asse, si dicono caratteristiche di sollecitazione le componenti nel triedro intrinseco dei vettori $\mathbf{R}(G)$ e $\mathbf{M}(G)$, che esprimono le azioni interne in G . Si usa la nomenclatura seguente:

$$\begin{aligned} N &:= \mathbf{R} \cdot \mathbf{t} && \equiv \text{sfuerzo normale}, \\ T &:= \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} && \equiv \text{sfuerzo di taglio}, \\ M &:= \mathbf{M} \cdot \mathbf{b} && \equiv \text{momento flettente} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI. 1. Per le *travi piane*, si usa la seguente notazione:

$$\mathbf{R} \equiv (N, \pm T, 0), \quad \mathbf{M} \equiv (0, 0, \mp M), \quad (5.1)$$

dove i segni sono assegnati secondo la convenzione comune. Le dimensioni fisiche di N e T sono quelle di una forza, e infatti queste due caratteristiche di sollecitazione sono anche dette *forza normale* e (*forza di*) *taglio*. Le dimensioni fisiche di M sono invece forza \times lunghezza.

2. Per calcolare le caratteristiche di sollecitazione in una sezione può essere conveniente considerare le azioni esterne agenti sulla porzione \mathcal{L}^- dell'asse. Se indichiamo per comodità con $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}^+$ il triedro intrinseco in $G \equiv G^-$ (Fig. 5.10), il

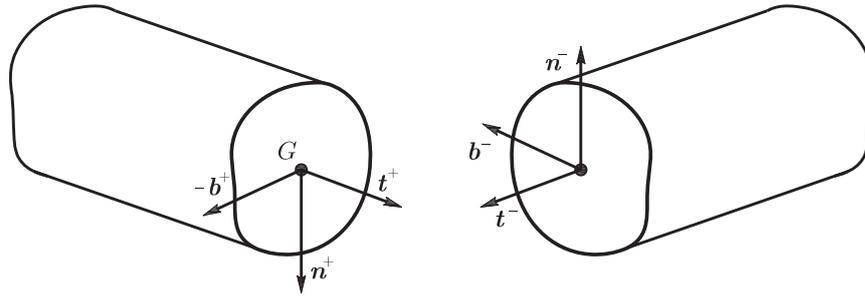


Figura 5.10

triedro corrispondente in G^+ si ottiene imponendo che, per ogni sistema di azioni esterne, risulti:

$$\mathbf{f}^+ \cdot \mathbf{t}^+ = N = \mathbf{f}^- \cdot \mathbf{t}^- \quad \forall \mathbf{R}, \quad (5.2)$$

e così via per le altre caratteristiche. Ricordando l'espressione (5.2) del Principio di Azione e Reazione e la definizione (5.3), la condizione (5.2) implica che

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^-) = 0 \quad \forall \mathbf{R} \quad \mathbf{t}^- = -\mathbf{t}^+.$$

Ripetendo l'argomentazione per altre caratteristiche di sollecitazione si ottiene il triedro $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}^-$ rappresentato in Fig. 5.10. Avendo presenti le convenzioni di positività, le caratteristiche di sollecitazione sono calcolabili sia 'guardando a destra' che 'guardando a sinistra' della sezione d'interesse, secondo convenienza. In particolare, per le travi piane, una volta determinato il cimento interno $(\mathbf{f}, \mathbf{c})^-$, cioè, il risultante e il momento risultante rispetto alla sezione corrente del sistema di azioni esterne agente sulla porzione \mathcal{L}^- dell'asse, si trova:

$$N = \mathbf{f}^- \cdot (-\mathbf{t}), \quad T = \mathbf{f}^- \cdot (-\mathbf{n}), \quad M = \mathbf{c}^- \cdot (-(-\mathbf{n}) \times (-\mathbf{t})). \quad (5.3)$$

5.3.1 Diagrammi

I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione ne visualizzano l'andamento lungo l'asse della trave; tracciarne i grafici è un'attività indispensabile sia nella *progettazione* che nella *verifica di resistenza* di una travatura.

Nel caso di travi piane, tracciare i diagrammi delle caratteristiche significa disegnare i grafici di tre funzioni dell'ascissa scelta sull'asse, $N = N(s)$, $T = T(s)$ e $M = M(s)$. Vediamo alcuni esempi, cominciando dai due considerati alla fine della sezione precedente.

a. Orientiamo l'asse della mensola da sinistra a destra, con origine delle ascisse nel punto di incastro. Osserviamo che la forza applicata ha nel triedro intrinseco la rappresentazione $\mathbf{f} = f\mathbf{n}$, $f > 0$; dunque, quanto allo sforzo normale, $N(s) \equiv 0$; quanto allo sforzo di taglio, $T(s) \equiv f > 0$. Per il momento flettente, il cui segno è ovunque negativo, troviamo: $M(s) = -f(l - s)$, e cioè, un andamento lineare crescente, da $M(0) = -fl$ all'incastro a $M(l) = 0$ nell'estremo libero.

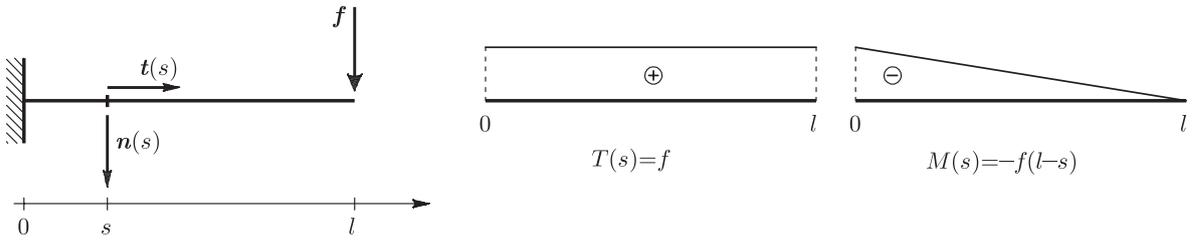


Figura 5.11

OSSERVAZIONE. Se, per calcolare le caratteristiche di sollecitazione nella sezione generica della trave, avessimo preferito guardare a sinistra, avremmo osservato un sistema di azioni esterne costituito dalla forza $-\mathbf{f} = \mathbf{f}^-$ e dalla coppia di reazione $-(fl) \mathbf{n} \times \mathbf{t} = \mathbf{c}^-$ esplicitate dal vincolo esterno di incastro. La nostra valutazione in valore e segno delle caratteristiche di sollecitazione, fatta questa volta sulla base delle relazioni (5.3), non sarebbe cambiata.

b. Basta scegliere un punto generico nel tratto verticale ed uno nel tratto orizzontale per tracciare i grafici in Fig. 5.12.

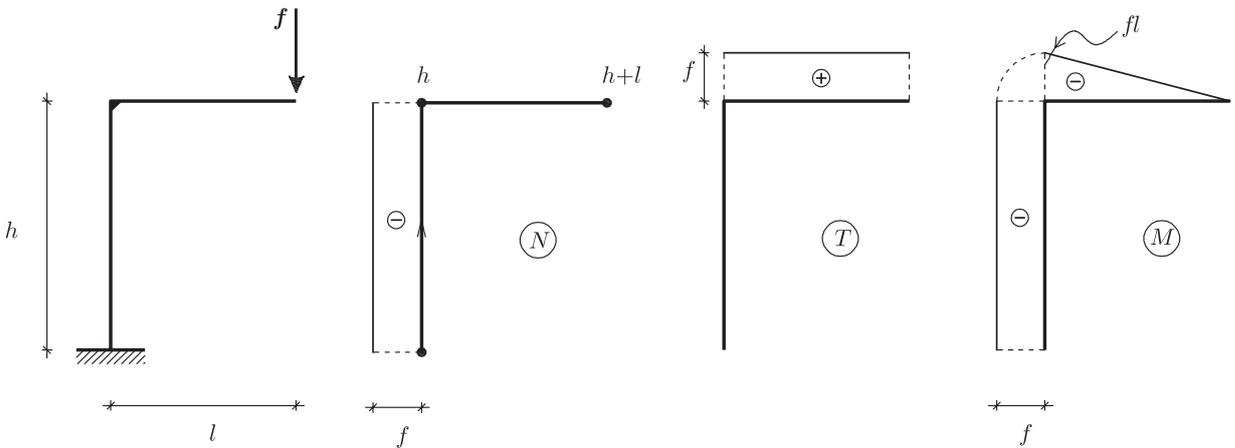


Figura 5.12

Si noti la continuità della funzione momento flettente nel punto dove l'asse forma un angolo.

c. Nel caso della trave di Fig. 5.13, doppiamente appoggiata e caricata al centro, si notino la simmetria rispetto al punto di mezzo dell'asse del diagramma del momento flettente e l'antisimmetria del diagramma del taglio. Si notino anche la discontinuità del taglio in quel punto e la corrispondente discontinuità della derivata del momento flettente:

$$T\left(\frac{l}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} |\mathbf{f}| = M'\left(\frac{l}{2} + 0\right), \quad T\left(\frac{l}{2} - 0\right) = -\frac{1}{2} |\mathbf{f}| = M'\left(\frac{l}{2} - 0\right).$$

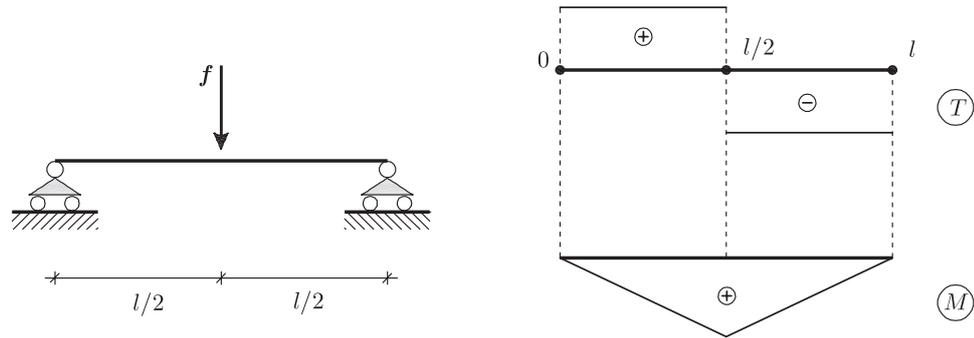


Figura 5.13

(qui abbiamo indicato con un apice l'operazione di differenziazione rispetto a s : $M' := \frac{dM}{ds}$). Infine, si noti che, in ogni altro punto dell'asse,

$$T(s) = M'(s), \quad s \in (0, l).$$

Questi esempi mettono in luce circostanze che non sono curiose e accidentali ma sono, invece, la fattispecie di proprietà generali delle caratteristiche della sollecitazione come funzioni dell'ascissa. Nella prossima sottosezione esamineremo queste proprietà in modo sistematico, nel caso semplice ma importante delle travi piane ad asse rettilineo.

5.3.2 Equilibrio puntuale di travi piane ad asse rettilineo

Per cominciare, si consideri una porzione infinitesima di trave non direttamente soggetta a carichi esterni, posta tra le ascisse s e $s + ds$. Le azioni interne esercitate su quella porzione dal resto della trave sono $N^S = N(s)$, $T^S = T(s)$ e $M^S = M(s)$ da sinistra e, da destra, $N^D = N(s + ds)$ etc. (si veda la Fig. 5.14).

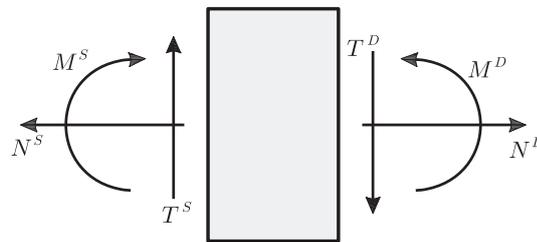


Figura 5.14

Per l'equilibrio, si dovrà avere

$$\begin{aligned} N(s + ds) - N(s) &= 0, \\ T(s + ds) - T(s) &= 0, \\ M(s + ds) - M(s) - T(s)ds &= 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

ovvero, dividendo formalmente per ds e passando al limite per $ds \rightarrow 0$,

$$N'(s) = 0, \quad T'(s) = 0, \quad M'(s) = T(s). \quad (5.5)$$

Dunque, in ogni tratto di trave piana che non sia soggetto a carichi, i diagrammi dello sforzo normale e dello sforzo di taglio sono *costanti*, il diagramma del momento flettente è *lineare*.

Se vi sono carichi applicati, le conclusioni appena raggiunte subiscono alcune significative modifiche. Esaminiamo prima il caso di carichi diffusi (Fig. 5.15), nel quale alle relazioni (5.4) vanno sostituite le relazioni più generali:

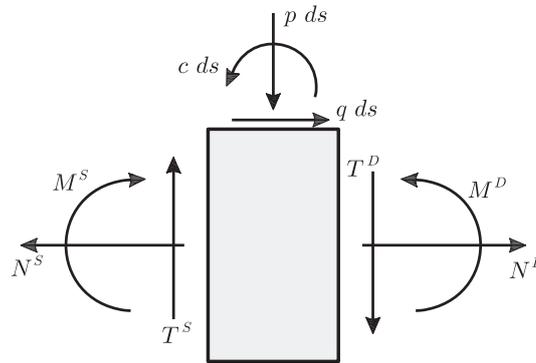


Figura 5.15

$$\begin{aligned} N(s+ds) - N(s) + q ds &= 0, \\ T(s+ds) - T(s) + p ds &= 0, \\ M(s+ds) - M(s) - T(s)ds + c ds &= 0 \end{aligned}$$

donde le *relazioni di equilibrio locale*:

$$N'(s) = -q(s), \quad T'(s) = -p(s), \quad M'(s) = T(s) - c(s), \quad (5.6)$$

un sistema di equazioni differenziali ordinarie che devono essere soddisfatte in ogni punto dell'asse dove *non* siano applicate forze e coppie concentrate.

OSSERVAZIONI. 1. Si supponga che non vi siano carichi concentrati nel tratto $s_0 \leq s \leq s_1$ dell'asse. Allora, per integrazione delle (5.6) si trova:

$$\begin{aligned} N(s) &= N(s_0) - \int_{s_0}^s q(t) dt, \\ T(s) &= T(s_0) - \int_{s_0}^s p(t) dt, \\ M(s) &= M(s_0) + T(s_0)(s - s_0) - \int_{s_0}^s \left(\int_{s_0}^t p(z) dz \right) dt - \int_{s_0}^s c(t) dt, \end{aligned} \quad (5.7)$$

per ogni $s \in [s_0, s_1]$.

2. Se e soltanto se $c(s) = 0$, (5.6)₃ implica una relazione di consistenza tra i diagrammi delle funzioni M e T : *la derivata del momento flettente dev'essere pari al valore del taglio.*

3. Segue da (5.6)_{2,3} che

$$M''(s) = (T(s) - c(s))' = -p(s) - c'(s). \quad (5.8)$$

Se $T(s) - c(s) = 0$ e, quindi, $M'(s) = 0$, allora, tenendo conto di (5.8), si vede che:

$$\begin{aligned} < 0 &\Rightarrow \text{il momento flettente ha un } \textit{massimo}; \\ -(p(s) + c'(s)) = 0 &\Rightarrow \text{il momento flettente ha un } \textit{flesso}; \\ > 0 &\Rightarrow \text{il momento flettente ha un } \textit{minimo}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ci rimane da esaminare la situazione finora esclusa. Nei punti della travatura dove sono applicate forze, una delle funzioni $N(s)$ e $T(s)$ non è differenziabile (o, magari, entrambe non lo sono); in quei punti – e in quelli dove è la funzione $M(s)$ a non essere differenziabile, per esservi applicata una coppia concentrata c_0 (si veda la Fig. 5.16) – l'equilibrio si esprime richiedendo che valgano le relazioni

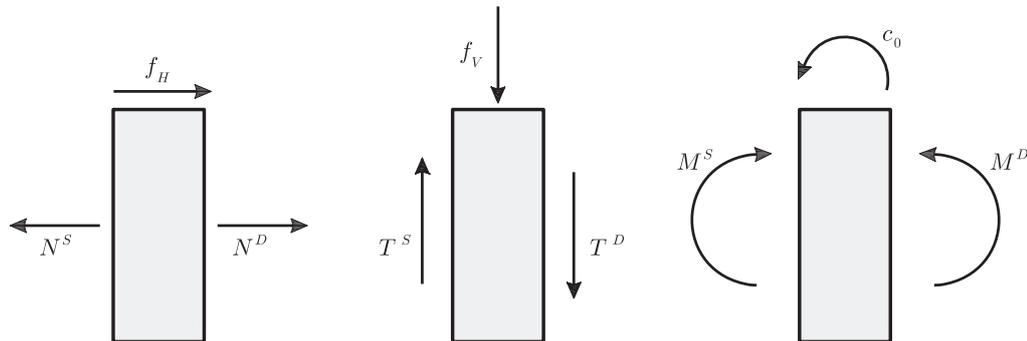


Figura 5.16

seguenti:

$$[[N]] = -f_H, \quad [[T]] = -f_V, \quad [[M]] = -c_0, \quad (5.10)$$

dove

$$[[\Psi]](s) := \Psi^D - \Psi^S, \quad \Psi^D := \Psi(s+0), \quad \Psi^S := \Psi(s-0)$$

indica il *salto* della funzione $\Psi(s)$ in un punto di discontinuità.¹

¹Ad esempio, la prima delle (5.10) si ottiene bilanciando le forze agenti:

$$N^D + f_H - N^S = 0.$$

Nel triedro intrinseco $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}^+$, le forze e coppie concentrate di Fig. 5.16 hanno le rappresentazioni:

$$\mathbf{f}_H = f_H \mathbf{t}, \quad \mathbf{f}_V = f_V \mathbf{n}, \quad \mathbf{c}_0 = c_0 \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad \text{con } f_H, f_V, c_0 > 0.$$

OSSERVAZIONE. Segue da (5.8)₁ che

$$[[M']] = [[T - c]]. \quad (5.11)$$

Si può vedere un'applicazione di questa relazione, e della seconda delle (5.10), nella redazione per $s = l/2$ dei diagrammi di momento flettente e taglio relativi all'ultimo esempio della sottosezione precedente.

5.3.3 Altri esempi di tracciamento di diagrammi

Tener presenti le proprietà espresse dalle relazioni (5.6)-(5.11) aiuta a tracciare alla svelta e senza errori i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione. Vediamo tre altri esempi, elementari ma importanti.

d. Nel caso della trave in figura, che è soggetta soltanto a carichi assiali, lo sforzo normale è l'unica caratteristica di sollecitazione non identicamente nulla.

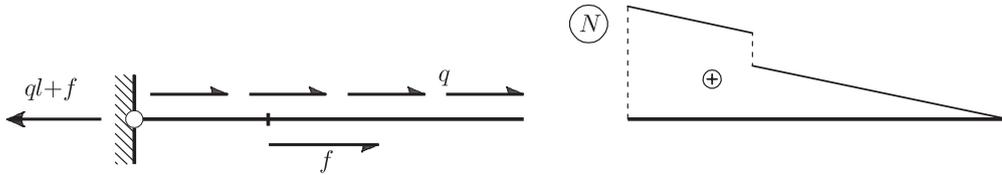


Figura 5.17

e. Nel caso della mensola uniformemente caricata in Fig. 5.18, si noti la concavità

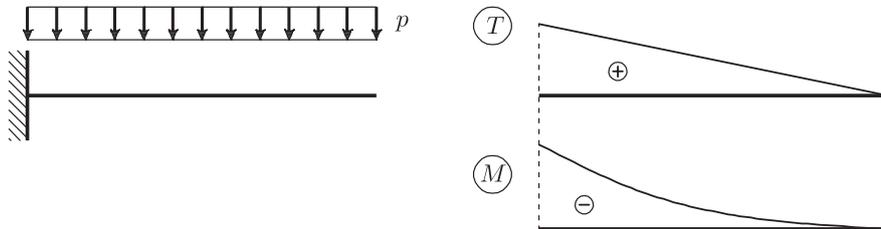


Figura 5.18

del diagramma del momento flettente, che ha l'espressione analitica:

$$M(s) = -\frac{1}{2}pl^2 \left(1 - \frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right), \quad s \in [0, l].$$

f. Per la trave appoggiata uniformemente caricata in Fig. 5.19, i diagrammi di taglio e momento flettente hanno l'espressione analitica:

$$T(s) = \frac{1}{2}pl \left(1 - 2\frac{s}{l}\right), \quad M(s) = \frac{1}{2}pl^2 \left(1 - \frac{s}{l}\right) \frac{s}{l}, \quad s \in [0, l].$$

come previsto dalle (5.7)_{2,3}.

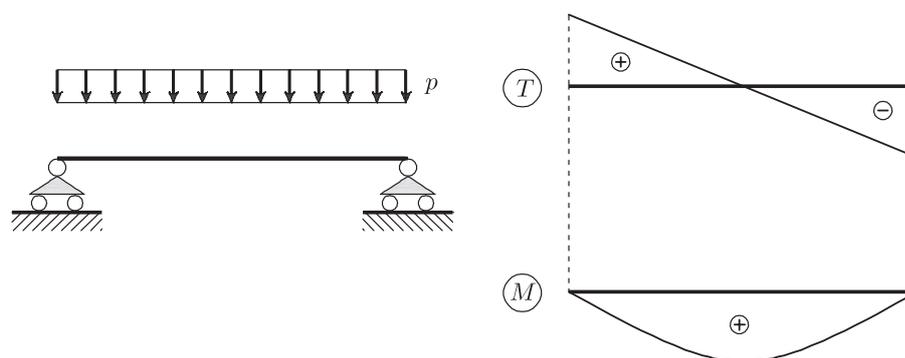


Figura 5.19

OSSERVAZIONE. Le caratteristiche di sollecitazione sono grandezze dotate di segno: una volta orientato l'asse della trave e scelta una sezione, la “mattonella dei segni” rappresentata in Fig. 5.14 ci ricorda quali ne siano i segni convenzionalmente positivi, da qualunque parte si guardi per calcolarle in quella sezione. Ciò vale anche per travature che, come quella in Fig. 5.20, siano globalmente orienta-

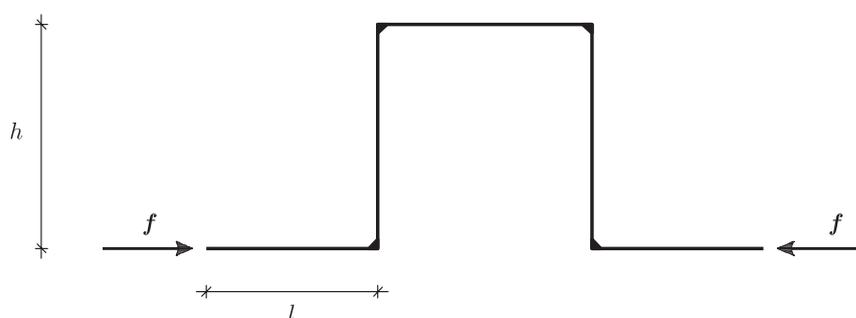


Figura 5.20

bili. Si noti, in particolare, l'uso della mattonella dei segni in corrispondenza di un punto di discontinuità della tangente all'asse: nella sezione $s = l - 0$, possiamo valercene considerando – ad esempio – le azioni esterne a sinistra; nella sezione $s = l + 0$, considerando le azioni esterne a destra (Fig. 5.21). E ancora, nelle sezioni $s = l + h - 0$ e $s = l + h + 0$, per riscontrare la continuità del momento flettente e le discontinuità di forza normale e taglio.

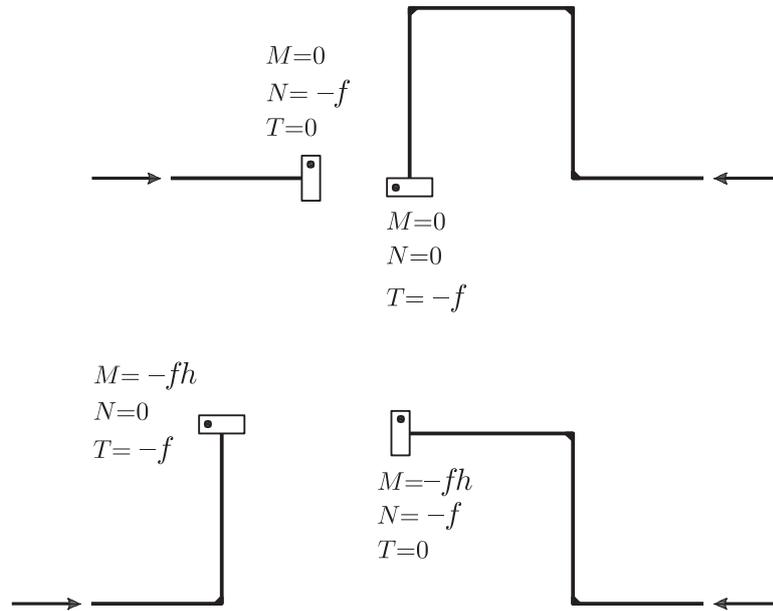


Figura 5.21

5.4 Le Travature

Il termine *travatura* si usa per riferirsi a una struttura che sia pensabile, magari non in un modo soltanto, come un complesso di travi tra loro collegate. In una travatura, le connessioni tra le travi che la compongono (\equiv *giunzioni*) possono essere *semplici* o *multiple* (triple, quadruple, etc.; si veda la Fig. 5.22):

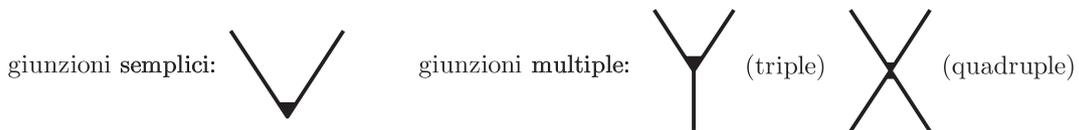


Figura 5.22

le giunzioni multiple vengono anche dette *nodi*. Una giunzione può essere *completa* o *incompleta*; i tipi di giunzione incompleta sono molti:

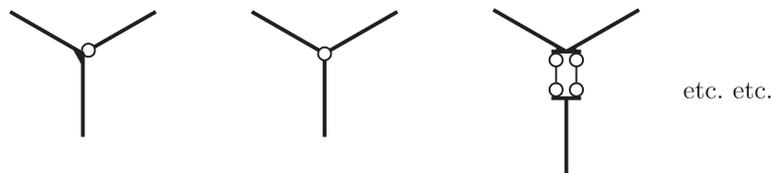


Figura 5.23

Va da sé che l'equilibrio di una travatura richiede che siano soddisfatte le equazioni cardinali della statica. Di regola, queste equazioni né bastano a de-

cidere se la travatura possa mantenersi in equilibrio sotto i carichi applicati in una configurazione assegnata né bastano a determinare, qualora l'equilibrio sia possibile, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, cioè, a determinare il cimento interno indotto dai carichi. Le condizioni di equilibrio aggiuntive, conseguenti alla presenza di *sconnessioni* (\equiv giunzioni incomplete), si possono comprendere in termini di azioni interne ed esprimere analiticamente in termini di caratteristiche della sollecitazione: *una sconnessione* riduce localmente il sistema di azioni interne trasmissibili e pertanto *colloca uno o più zeri nei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione*.

Ci limiteremo, per semplicità, a considerare *travature piane*, cioè, complessi di travi i cui assi siano contenuti in un unico piano, che sia anche il piano dei carichi applicati. La tavola in Fig. 5.24 raccoglie i tipi di sconnessione possibili nel caso di giunzione incompleta tra due travi componenti una travatura piana.

	TIPO	MOTI RELATIVI	CONSEGUENZE STATICHE
s. semplici		\longleftrightarrow	$N=0$
		\updownarrow	$T=0$
		\circlearrowright	$M=0$
s. doppie		\longleftrightarrow	$N=0 \quad \& \quad M=0$
		\updownarrow	$T=0 \quad \& \quad M=0$
s. tripla		\circlearrowright	$N=0, \quad T=0 \quad \& \quad M=0$

Figura 5.24

Ci interessa, in particolare, giustificare le condizioni sulle caratteristiche di sollecitazione che appaiono nella colonna di destra. Ricordiamo che, per una trave piana, le variabili cinematiche, che definiscono localmente un atto di moto, sono $(\bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})$; che le caratteristiche di sollecitazione sono, nell'ordine, (N, T, M) ; e che la potenza spesa localmente dalle azioni interne in un generico atto di moto è, dunque,

$$\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = N\bar{w} + T\bar{v} + M\bar{\varphi}. \quad (5.12)$$

La condizione qualificante, che individua come *perfette* (perché i moti relativi proibiti restano tali per grandi siano gli sforzi applicati) e *prive d'attrito* (perché i moti relativi permessi possono aver luogo per piccoli che siano gli sforzi applicati)

le giunzioni che qui consideriamo, è che non vi sia alcuna spesa di potenza in qualunque moto relativo permesso:

$$\llbracket N\bar{w} + T\bar{v} + M\bar{\varphi} \rrbracket = 0. \quad (5.13)$$

Ad esempio, se si considera la prima delle giunzioni incomplete in Fig. 5.24, per la quale

$$\bar{v}^+ = \bar{v}^- =: \bar{v}, \quad \bar{\varphi}^+ = \bar{\varphi}^- =: \bar{\varphi},$$

la condizione (5.13) prende l'aspetto:

$$N^+\bar{w}^+ - N^-\bar{w}^- + \llbracket T \rrbracket \bar{v} + \llbracket M \rrbracket \bar{\varphi} = 0$$

e deve valere per qualunque scelta di $\bar{w}^+, \bar{w}^-, \bar{v}$ e $\bar{\varphi}$; dunque,

$$N^+ = 0 = N^-, \quad \llbracket T \rrbracket = 0, \quad \llbracket M \rrbracket = 0.$$

Questo esempio ci mostra che, se la continuità di una variabile cinematica non è garantita causa la presenza di una sconnessione, la caratteristica di sollecitazione corrispondente deve avere un punto di nullo; in questo caso particolare, tale condizione di nullo si può esprimere, alternativamente, nella forma $N^+ = 0$, se si guarda al sistema di forze e coppie che insiste sulla trave alla destra della giunzione, oppure nella forma $N^- = 0$, se si guarda al sistema di forze e coppie che insiste sulla trave alla sinistra.

OSSERVAZIONI. 1. Per comprendere la relazione (5.12) conviene ricordare le convenzioni che abbiamo stipulato per le travi piane quanto alla scelta dei segni dei parametri di spostamento e rotazione e delle caratteristiche di sollecitazione e verificare che ai sensi di quelle relazioni queste sono le componenti nel triedro intrinseco $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ dei vettori risultante e momento risultante e dei vettori che definiscono l'atto di moto:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\equiv (N, \mp T, 0), & \mathbf{M} &\equiv (0, 0, \pm M); \\ \bar{\mathbf{v}} &\equiv (\bar{w}, \mp \bar{v}, 0), & \bar{\boldsymbol{\omega}} &\equiv (0, 0, \pm \bar{\varphi}). \end{aligned}$$

2. È facile vedere quali condizioni statiche seguano dalla presenza della seconda e della terza giunzione di Fig. 5.24, che involgono una sconnessione semplice (se si preferisce, una connessione doppia, ma non tripla) tra due parti affacciate di una travatura: rispettivamente,

$$T^+ = 0 = -T^- \quad \text{e} \quad M^+ = 0 = -M^-.$$

Come abbiamo già osservato, queste condizioni statiche sono indipendenti dalle equazioni cardinali e si aggiungono ad esse per stabilire il bilancio delle azioni esterne. Il lettore potrà da sé esaminare il caso di sconnessioni doppie.

3. Esaminiamo le somiglianze e le differenze nell'analisi dell'equilibrio di due strutture travate identiche, salvo che per la presenza di una sconnessione (Fig. 5.25).

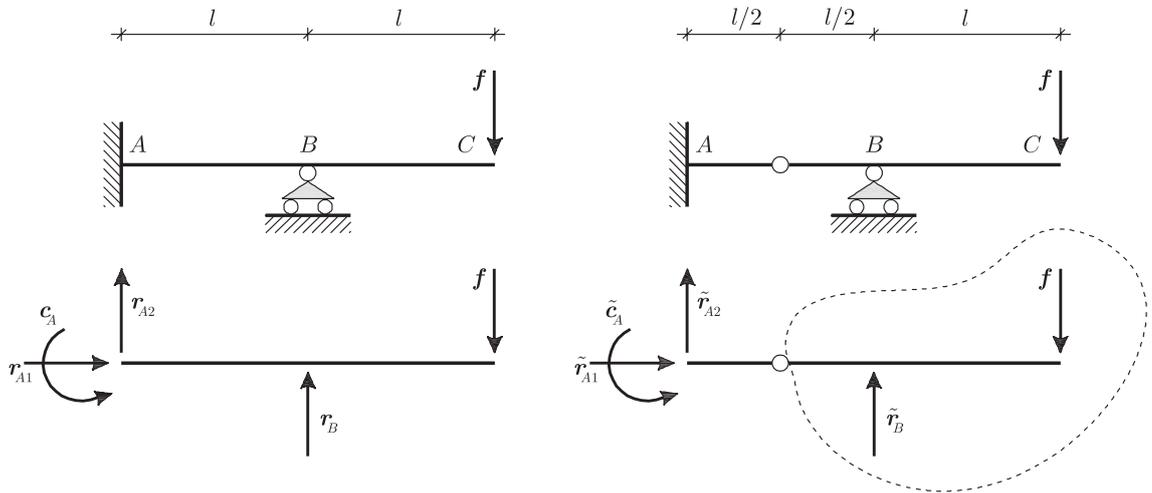


Figura 5.25

In entrambi i casi, eseguita l'analisi dei vincoli esterni, le equazioni cardinali della statica hanno l'aspetto:

$$r_{A1} = 0, \quad r_{A2} + r_B - f = 0, \quad -c_A + r_{A2}l - fl = 0. \quad (5.14)$$

Per la travatura a destra, però, dev'esserci uno zero nel diagramma del momento flettente in corrispondenza della sconnessione; ciò si traduce nell'equazione

$$\frac{1}{2} \tilde{r}_B l - \frac{3}{2} fl = 0, \quad (5.15)$$

che si aggiunge alle tre equazioni (5.14). Ne segue che, mentre il sistema (5.14) ha ∞^1 soluzioni, il sistema (5.14)-(5.15) ne ha una ed una soltanto, quella che l'aggiunta della condizione statica associata alla sconnessione seleziona tra le infinite soluzioni del primo sistema. Se la cerniera viene vista come una giunzione invece che come una sconnessione, all'equazione aggiuntiva spetta l'interpretazione alternativa di condizione di equilibrio per l'una o l'altra delle parti di travatura che la cerniera congiunge (ad esempio, la parte che nell'ultima delle figure soprastanti è racchiusa da un contorno tratteggiato), in applicazione del basilare principio della statica che vuole in equilibrio ogni parte di una struttura in equilibrio.

4. La condizione (5.13) può essere adattata al caso in cui, invece di una giunzione, in una sezione di travatura sia imposto un vincolo cinematico esterno. Consideriamo, ad esempio, il primo dei vincoli di Fig. 5.26, per il quale valgono le restrizioni cinematiche seguenti:

$$\bar{w}^+ = \bar{w}^- = 0, \quad \bar{v}^- = 0, \quad \bar{\varphi}^- = 0.$$

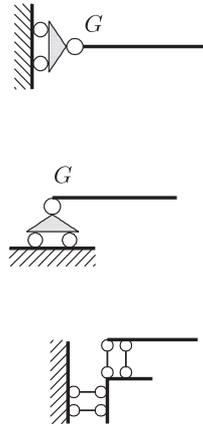


Figura 5.26

La condizione (5.13) diviene:

$$T^+ \bar{v}^+ + M^+ \bar{\varphi}^+ = 0 \quad \forall \bar{v}^+, \bar{\varphi}^+ \quad \Leftrightarrow \quad T^+ = 0, \quad M^+ = 0,$$

ed esprime l'annullarsi in corrispondenza del vincolo delle caratteristiche di sollecitazione taglio e momento flettente.

5. La condizione (5.13) può essere anche adattata al caso in cui vi siano carichi concentrati applicati alla giunzione: ad esempio, se un carico verticale $\mathbf{f} = f_V \mathbf{n}$ insiste su una giunzione a cerniera, per la quale

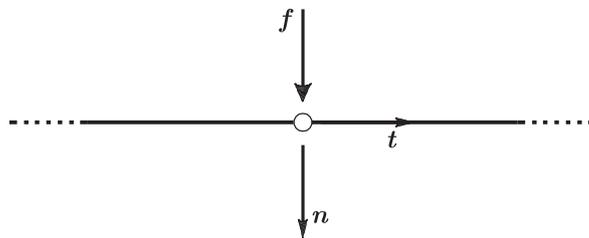


Figura 5.27

$$\bar{w}^+ = \bar{w}^- =: \bar{w}, \quad \bar{v}^+ = \bar{v}^- =: \bar{v},$$

la condizione (5.13) prende l'aspetto:

$$[[N]] \bar{w} + ([[T]] + f_V) \bar{v} + [[M\bar{\varphi}]] = 0 \quad \forall \bar{w}, \bar{v}, \varphi^+, \varphi^-.$$

Quindi,

$$[[N]] = 0, \quad [[T]] + f_V = 0, \quad M^- = M^+ = 0; \quad (5.16)$$

la condizione significativa per l'equilibrio della travatura nel suo complesso, $M^- = M^+ = 0$, non cambia. È interessante osservare la coincidenza, nient'affatto casuale, tra (5.16)₂ e (5.10)₂. Si noterà, poi, che il punto di applicazione del carico

non ha rilievo, in ragione della continuità dello spostamento perpendicolare alla direzione dell'asse nel punto in cui si trova la cerniera. Una diversa conclusione si raggiunge se una coppia concentrata esterna $\mathbf{c}_0 = c_0 \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ è applicata in corrispondenza della cerniera: intanto, ha senso pensare la coppia applicata solo immediatamente a sinistra o a destra della cerniera, ma non sul perno che realizza il collegamento tra le due travi adiacenti; inoltre, nel primo caso,

$$[[N]] = 0, \quad [[T]] = 0, \quad M^S = c_0, \quad M^D = 0,$$

e quindi la condizione di equilibrio aggiuntiva è l'ultima di queste; nel secondo, la condizione di equilibrio aggiuntiva è:

$$M^S = 0.$$

6. Si possono avere sconessioni in corrispondenza di nodi. La Fig. 5.28 serve a far osservare che uno stesso tipo di sconessione (qui, una cerniera) può avere molte e diverse conseguenze statiche.

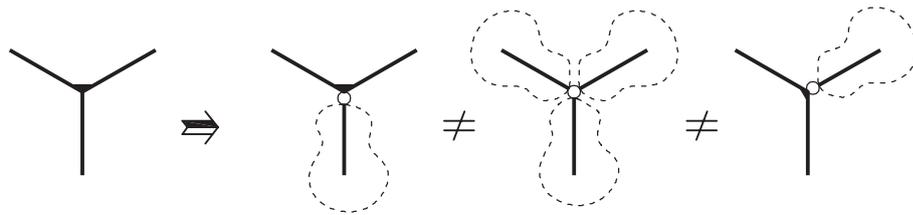


Figura 5.28

7. Scriviamo le equazioni cardinali della statica per la travatura in Fig. 5.29.

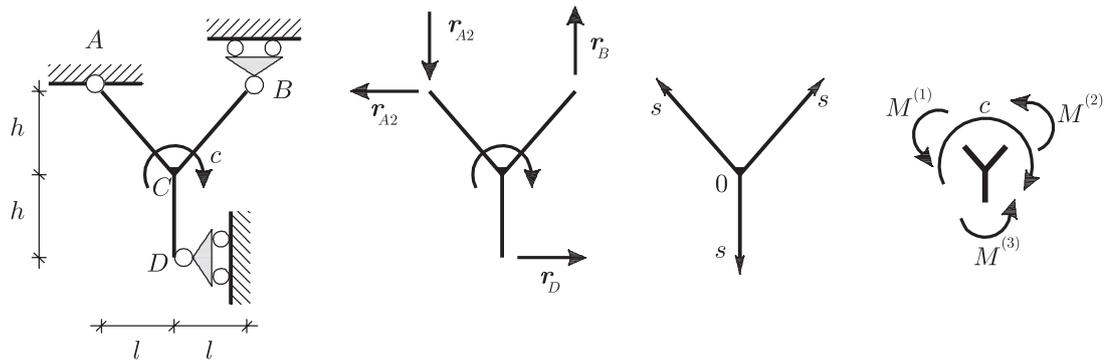


Figura 5.29

Si trova:

$$\begin{aligned} -r_{A1} + r_D &= 0, \\ -r_{A2} + r_B &= 0, \\ r_{A1}h + r_{A2}l + r_B l + r_D h - c &= 0, \end{aligned} \tag{5.17}$$

e si vede facilmente che le caratteristiche della matrice del sistema e della matrice completa sono entrambe uguali a 3, sicché ci sono ∞^1 soluzioni. L'interesse dell'esempio consiste nel constatare che le equazioni (5.17) esprimono il bilancio delle azioni interne sul nodo centrale della travatura, inteso come parte rigida di quest'ultima. In particolare, la (5.17)₃ esprime il bilancio alla rotazione del nodo, che si può scrivere più concisamente nella forma

$$\sum_{i=1}^3 M^{(i)} + c = 0, \quad (5.18)$$

dove

$$M^{(1)} = r_{A1}h + r_{A2}l, \quad M^{(2)} = r_B l, \quad M^{(3)} = r_D h \quad (5.19)$$

sono i momenti flettenti nelle sezioni adiacenti al nodo delle travi che ivi si congiungono. Equazioni di bilancio alla rotazione del tipo di (5.18) giocano un ruolo centrale nello studio di una particolare classe di strutture travate di particolare interesse nell'ingegneria civile ed edile, i *telai* e, più in generale, le *strutture intelaiate*.

ESERCIZI

1. Si consideri la travatura piana rappresentata in Fig. 5.30. Si calcolino:
 - (a) la reazione in A ;
 - (b) la componente lungo \mathbf{e}_1 della reazione in D ;
 - (c) il valore assoluto del momento flettente nella sezione S .

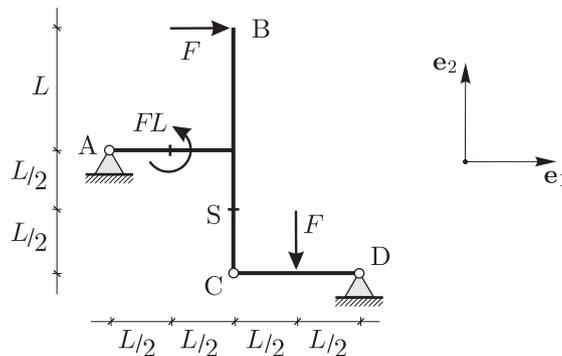


Figura 5.30

Soluzione.

Un metodo per risolvere il problema di equilibrio consiste nell'“esplodere” la travatura nelle sue parti rigide, tenendo conto nello scrivere le equazioni cardinali della statica per ciascuna parte non solo dei carichi esterni a quella parte direttamente applicati ma anche delle reazioni vincolari e delle azioni interne che le parti si scambiano nelle giunzioni rimosse per effettuare l’“esplosione” (Fig. 5.31).

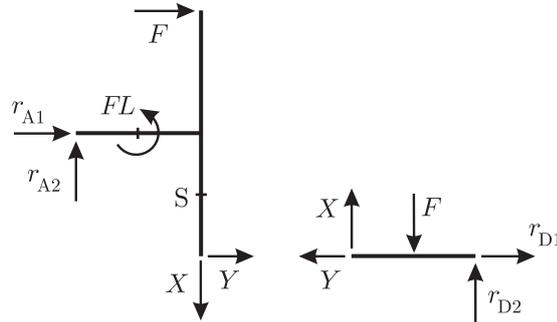


Figura 5.31

Equilibrio dell'asta CD :

$$F \frac{L}{2} - XL = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F}{2},$$

$$X + r_{D2} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{D2} = \frac{F}{2},$$

$$Y = r_{D1}.$$

Equilibrio della parte rimanente:

$$r_{A1} + F + Y = 0,$$

$$r_{A2} - F - X = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(a)} \quad r_{A2} = \frac{F}{2};$$

$$FL - 2FL - r_{A1}L - r_{A2}L = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(b)} \quad r_{A1} = -\frac{3}{2}F;$$

$$\Rightarrow \quad \text{(c)} \quad Y = \frac{1}{2}F = r_{D1}, \quad \text{(d)} \quad |M(S)| = \left| Y \frac{L}{2} \right| = \left| \frac{FL}{4} \right|.$$

2. Si consideri la travatura piana rappresentato in Fig. 5.32.

(a) Si controlli che il sistema dei carichi applicati ha risultante e momento risultante nulli.

(b) Si traccino i diagrammi quotati delle caratteristiche di sollecitazione N , T e M della struttura.

(c) Si calcoli il valore assoluto del momento flettente nella sezione S .

Soluzione. I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono visibili in Fig. 5.33; il valore assoluto del momento flettente nella sezione S è:

$$M(S) = FL.$$

3. Si faccia riferimento alla Fig. 5.34.

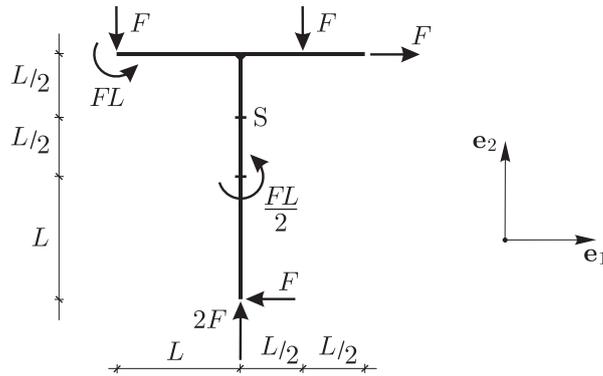


Figura 5.32

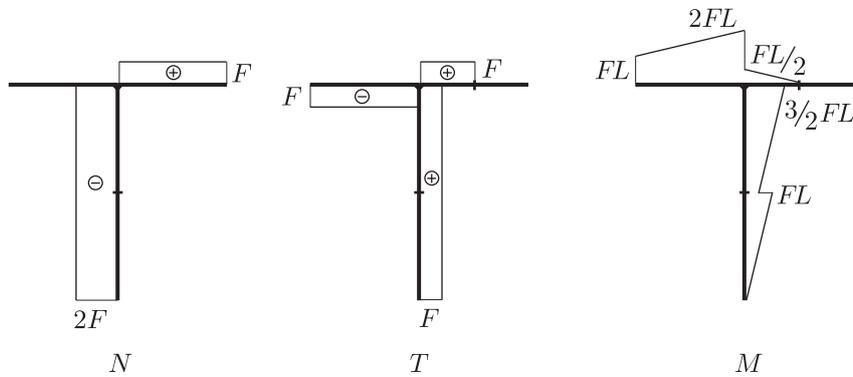


Figura 5.33

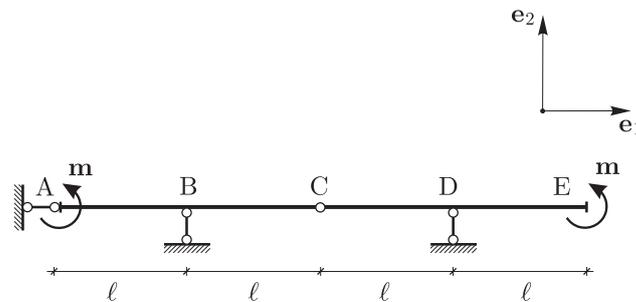


Figura 5.34

Nei punti A e B sono applicate due coppie, entrambe pari a $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_3$, con $m > 0$.

- Determinare il centro di rotazione della trave AC .
- Determinare il modulo della reazione del pendolo in B .
- Determinare il modulo del taglio nel punto C .
- Tracciare i diagrammi quotati di taglio e momento flettente.

Soluzione.

(a) I campi di velocità compatibili con i vincoli hanno la forma:

$$\mathbf{v}(P) = \omega \mathbf{e}_3 \times \overrightarrow{BP} \quad \text{se } P \in AC,$$

$$\mathbf{v}(P) = -\omega \mathbf{e}_3 \times \overrightarrow{DP} \quad \text{se } P \in CE.$$

L'unico punto la cui velocità è sempre nulla è B .

(b) Le reazioni dei vincoli sono quelle mostrate in Fig. 5.35. Imponendo che esse

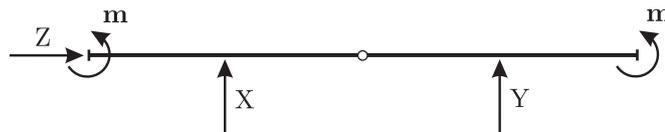


Figura 5.35

equilibrino i carichi, se ne trovano i valori:

$$\begin{cases} Z = 0 \\ X + Y = 0 \\ 2m + 2Y\ell = 0 \quad (\mathbf{m}(B) = \mathbf{0}) \end{cases} \Rightarrow Y = -X = \frac{m}{\ell} \Rightarrow |X| = \frac{m}{\ell}.$$

(c) Riducendo a C la forza Y in D e la coppia m in E si trova: $|T| = \frac{m}{\ell}$.

(d) Questi sono i diagrammi richiesti:

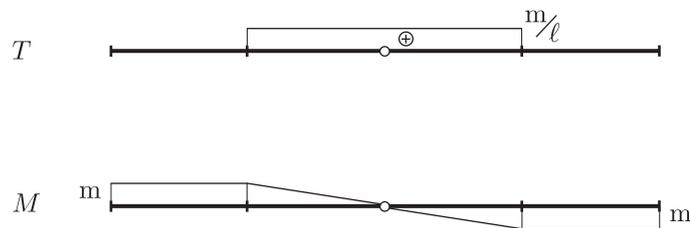


Figura 5.36

