MECCANICA LAGRANGIANA DEI CORPI RIGIDI (PIANI)

Nella scrittura delle equazioni di Lagrange è necessario esplicitare la forma che assume l'energia cinetica di un corpo rigido.

Ricordiamo a tale scopo l'espressione del campo di velocità dei punti di un corpo rigido $\mathcal{R}$

$$\underset{\sim}{v}(P) = \underset{\sim}{v}(Q) + \underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP} \qquad \forall P \in \mathcal{R} \qquad (1)$$

L'energia cinetica è definibile come

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \varrho \, |\underset{\sim}{v}(P)|^2 \qquad P \in \mathcal{R}.$$

Utilizzando la (1), abbiamo che

$$|\underset{\sim}{v}(P)|^2 = \left(\underset{\sim}{v}(Q) + \underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}\right) \cdot \left(v(Q) + \underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}\right) =$$

$$= |\underset{\sim}{v}(Q)|^2 + 2\underset{\sim}{v}(Q) \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}) + (\underbrace{\underset{\sim}{\omega}}_{a} \times \underbrace{\overrightarrow{QP}}_{b}) \cdot \underbrace{(\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP})}_{c}$$

Ricordando che $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{a}$,

otteniamo che

$$(\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{QP} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \cdot \underset{\sim}{\omega}, \text{ e dunque}$$

$$|\underset{\sim}{v}(P)|^2 = |v(Q)|^2 + 2\,\underset{\sim}{v}(Q) \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}) + \overrightarrow{QP} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \overrightarrow{QP}) \cdot \underset{\sim}{\omega}.$$

Allora possiamo scrivere l'espressione dell'energia cinetica come segue:

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \rho |v(Q)|^2 + \int_{\mathcal{R}} \rho\, \underset{\sim}{v}(Q)\cdot(\underset{\sim}{\omega}\times\overrightarrow{QP}) + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \rho\, \overrightarrow{QP}\times(\omega\times\overrightarrow{QP})\cdot\underset{\sim}{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} m|v(Q)|^2 + \underset{\sim}{v}(Q)\cdot(\underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{S}) + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \rho\, \overrightarrow{QP}\times(\omega\times\overrightarrow{QP})\cdot\underset{\sim}{\omega},$$

dove $\underset{\sim}{S} := \int_{\mathcal{R}} \overrightarrow{QP}$ è il vettore dei momenti statici.

Mostriamo adesso che

$$\int_{\mathcal{R}} \rho\, \overrightarrow{QP}\times(\underset{\sim}{\omega}\times\overrightarrow{QP})\cdot\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{J}_Q\underset{\sim}{\omega}\cdot\underset{\sim}{\omega}$$

dove $\underset{\sim}{J}_Q$ è il tensore d'inerzia rispetto al punto Q della distribuzione di massa $\mathcal{R}$. Questa relazione è vera anche nel caso tridimensionale, ma qui ci limitiamo a dimostrarla nel caso piano.

Scelto un sistema di riferimento $\{Q; \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$, poniamo

$$\underset{\sim}{\omega} = \omega\underset{\sim}{e}_3, \quad \overrightarrow{QP} = x\underset{\sim}{e}_1 + y\underset{\sim}{e}_2;$$

avremo allora

$$\int_{\mathcal{R}} \rho\,(x\underset{\sim}{e}_1 + y\underset{\sim}{e}_2)\times(\omega x\underset{\sim}{e}_2 - \omega y\underset{\sim}{e}_1)\cdot\omega\underset{\sim}{e}_3 =$$

$$= \int_{\mathcal{R}} \rho\,\omega^2(x^2+y^2)\,\underset{\sim}{e}_3\cdot\underset{\sim}{e}_3 = J_Q\omega^2 = \underset{\sim}{J}_Q\underset{\sim}{\omega}\cdot\underset{\sim}{\omega}. \quad \blacksquare$$

In definitiva:

$$K = \frac{1}{2} m|\underset{\sim}{v}(Q)|^2 + \underset{\sim}{v}(Q)\cdot(\underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{S}) + \frac{1}{2}\underset{\sim}{J}_Q\underset{\sim}{\omega}\cdot\underset{\sim}{\omega}.$$

Se si sceglie Q coincidente con il centro di massa, si ottiene:

$$K = \frac{1}{2} m |v(G)|^2 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{J}_G \underset{\sim}{\omega} \cdot \underset{\sim}{\omega} = \frac{1}{2} m |\underset{\sim}{v}(G)|^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

noto come teorema di König.

Se riusciamo invece ad identificare il centro C di rotazione del corpo, allora, essendo $\underset{\sim}{v}(C) = \underset{\sim}{0}$

$$K = \frac{1}{2} \underset{\sim}{J}_C \underset{\sim}{\omega} \cdot \underset{\sim}{\omega} = \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

Una volta che sia nota l'espressione dell'energia cinetica, gli sviluppi necessari per pervenire alle equazioni del moto non differiscono dal caso considerato dei sistemi di punti materiali