

Richiami di algebra lineare

2.1 Prodotto scalare, prodotto vettoriale e prodotto misto

Sia V lo spazio vettoriale tridimensionale ordinario, che dotiamo di una *base ortonormale*

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j =: \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è il *simbolo di Kronecker*. Di ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ possiamo dare la rappresentazione in questa base:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i,^1 \quad v_i := \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i; \quad (2.1)$$

di due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ possiamo esprimere il *prodotto scalare* nella forma

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i. \quad (2.2)$$

L'operazione di *prodotto vettoriale* associa ad ogni coppia ordinata di vettori $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ il vettore $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, che si può rappresentare nella base prescelta nel modo seguente:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k \mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = e_{ijk} a_i b_j, \quad e_{ijk} := \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k, \quad (2.3)$$

dove e_{ijk} è il *simbolo di Ricci*, definito valendosi della nozione di *prodotto misto* di tre vettori.

Tutte queste nozioni sono note fin dalla prima parte del nostro studio, il corso di Meccanica dei Solidi 1, cui si rimanda per maggiori dettagli. Qui di seguito vogliamo introdurre una nuova nozione di prodotto, il *prodotto diadico*.

¹ Si ricordi che la presenza di una coppia di indici ripetuti sottintende l'esecuzione di una somma di termini monomi, uno per ogni determinazione ammessa degli indici: qui, ad esempio,

$$v_i \mathbf{e}_i = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3.$$

2.2 Prodotto diadico

Data una coppia ordinata di vettori $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, il loro prodotto diadico $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ trasforma linearmente V in sé, nel modo seguente:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.4)$$

Facendo anche riferimento alla Figura 2.1, si vede che, in base a questa

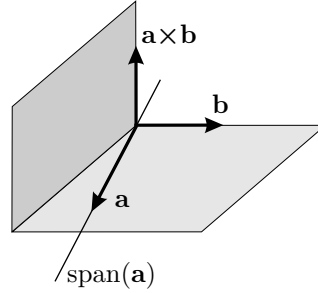


Figura 2.1.

definizione, tutti i vettori in V sono mandati in $\text{span}(\mathbf{a})$, la retta generata dal primo elemento della diade $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. In particolare, tutti i vettori del semispazio verso il quale punta il secondo elemento della diade sono trasformati in vettori con lo stesso verso di $\mathbf{a}$, e vanno a comporre la semiretta $\{\alpha \mathbf{a} \mid \alpha > 0\}$; tutti i vettori nel piano perpendicolare a $\mathbf{b}$ sono trasformati nel vettore $\mathbf{0}$; tutti gli altri vanno a comporre la semiretta $\{\alpha \mathbf{a} \mid \alpha < 0\}$.

2.3 Tensori del secondo ordine

Ogni combinazione lineare di diadi è una trasformazione lineare di V in sé. Valendoci della nozione di prodotto diadico, possiamo costruire, partendo dalla base ortonormale scelta per V , una base ortonormale per la collezione Lin di tutti i *tensori del secondo ordine*, cioè, la collezione di tutte le trasformazioni lineari di V in sé.²

2.3.1 Base ortonormale per lo spazio dei tensori

Un modo per procedere alla costruzione richiamata nel titolo è cominciare da una diade costituita da vettori della base, ad esempio, $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$. L'applicazione della definizione (2.3) ci restituisce

² Per economia di scrittura, rinunciando ad usare la notazione più precisa $\text{Lin}(V)$, in luogo di Lin , dato che V sarà l'unico spazio vettoriale soggiacente alle nostre manipolazioni algebriche.

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{v} = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_1 = v_2\mathbf{e}_1$$

ovvero, usando una rappresentazione matriciale,

$$\begin{bmatrix} & & \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall \mathbf{v} \in V;$$

l'arbitrarietà di scelta di $\mathbf{v}$ implica che la matrice di $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ ha l'aspetto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Similmente si mostra che la matrice di $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ ha l'aspetto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e che, in generale, l'unico elemento non nullo della matrice associata a $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ è quello che si trova i -esima riga e j -esima colonna e vale 1. Una combinazione lineare delle 9 diadi costruibili con i vettori della base ortonormale di V restituisce qualunque matrice 3×3 :

$$[\mathbf{M}] = M_{ij}[\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j].$$

Per mostrare che le diadi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ costituiscono effettivamente una base ortonormale, introduciamo la nozione di *prodotto scalare tra diadi*:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} := (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (2.5)$$

Allora,

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_h)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = \delta_{ih}\delta_{jk};$$

quindi ognuna delle diadi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ha modulo 1 ed è ortogonale a tutte le altre. Di una trasformazione lineare $\mathbf{V}$ di V in sé si può definire il prodotto scalare con una diade $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := (\mathbf{V}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, \quad (2.6)$$

e dare la rappresentazione conseguente:

$$\mathbf{V} = V_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad V_{ij} := \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.7)$$

(si noti l'identità di struttura, niente affatto casuale, di questa rappresentazione di un tensore del secondo ordine e della rappresentazione (2.1) di un vettore). La nozione (2.6) ci permette di definire il *tensore trasposto* $\mathbf{V}^T$ di un dato tensore $\mathbf{V}$: è quell'unico tensore che soddisfa la relazione

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V. \quad (2.8)$$

I numeri reali V_{ij} sono le *componenti* del tensore $\mathbf{V}$ nella base ortonormale che abbiamo costruito per Lin e coincidono con gli elementi della matrice associata a $\mathbf{V}$ relativamente a quella stessa base. In particolare, le componenti di $\mathbf{V}^T$ risultano essere $V_{ij}^T = V_{ji}$, mentre per il *tensore identità* $\mathbf{I}$ si ha che

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad I_{ij} = \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

2.3.2 Traccia e determinante

La *traccia* di un tensore $\mathbf{V}$ è per definizione il numero reale

$$\text{tr } \mathbf{V} := \sum_{i=1}^3 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^3 V_{ii}; \quad (2.10)$$

quanto al *determinante* di $\mathbf{V}$, si ha:

$$\det \mathbf{V} := \mathbf{V}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{V}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V}\mathbf{e}_3 = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}. \quad (2.11)$$

Osservazione. La nozione di operatore di traccia si dà nel modo più conveniente specificandone l'azione sulle diadi:

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V. \quad (2.12)$$

Poichè l'operatore così definito è lineare, quando di un tensore $\mathbf{V}$ si consideri una rappresentazione in componenti $\mathbf{V} = V_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, si trova che la definizione (2.10) è una conseguenza immediata della definizione (2.12):

$$\text{tr } \mathbf{V} = \text{tr}(V_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = V_{ij} \text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = V_{ij}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = V_{ij} \delta_{ij} = V_{ii}.$$

2.3.3 Composizione e prodotto scalare di tensori

La composizione $\mathbf{AB}$ di due tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è il tensore così definito:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{v} := \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V; \quad (2.13)$$

in forza di questa definizione, le matrici corrispondenti si compongono con la familiare regola 'righe per colonne':

$$(\mathbf{AB})_{ik} = A_{ij} B_{jk}.$$

Non è difficile convincersi che Lin è uno spazio vettoriale con prodotto interno, di dimensione pari a 9: la nozione di prodotto tra due elementi qualunque di Lin è naturalmente completamente coerente con le definizioni (2.5) e (2.6), che abbiamo dato in precedenza, e ha la forma seguente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} := \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) \quad (2.14)$$

Segue da questa definizione che il prodotto scalare di due tensori si può valutare, proprio come il prodotto scalare di due vettori, come somma dei prodotti delle loro omologhe componenti in una base ortonormale:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij} \quad (2.15)$$

(si riveda la formula (2.2)).

2.3.4 Tensori simmetrici e tensori antisimmetrici

Due tensori, il cui prodotto scalare sia nullo, si dicono tra loro perpendicolari. In particolare, come si verifica facilmente, ogni *tensore simmetrico* $\mathbf{S}$, cioè, ogni tensore che obbedisce la condizione

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T), \quad (2.16)$$

è perpendicolare ad ogni *tensore antisimmetrico* $\mathbf{W}$, cioè, ad ogni tensore che obbedisce la condizione

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{W} - \mathbf{W}^T).^3 \quad (2.17)$$

Le collezioni dei tensori simmetrici e antisimmetrici, che indichiamo rispettivamente con Sym e Skw, sono due sottospazi complementari di Lin:

$$\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skw}, \quad (2.18)$$

tra loro ortogonali, l'uno di dimensione 6, l'altro di dimensione 3. È agevole costruire due basi ortonormali per questi due sottospazi; si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &:= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{B}_4 &:= 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{B}_2 &:= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, & \mathbf{B}_5 &:= 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{B}_3 &:= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, & \mathbf{B}_6 &:= 2^{-1/2}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2), \end{aligned}$$

per Sym e, per Skw,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &:= 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{C}_2 &:= 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{C}_3 &:= 2^{-1/2}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

In termini di queste basi, un tensore simmetrico $\mathbf{S}$ ha la rappresentazione

³ Si osservi che le condizioni (2.16) e (2.17) sono equivalenti, rispettivamente, alle condizioni

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T.$$

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^6 S_i \mathbf{B}_i, \quad S_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_i; \quad (2.19)$$

un tensore antisimmetrico $\mathbf{W}$, la rappresentazione

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^3 W_i \mathbf{C}_i, \quad W_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_i. \quad (2.20)$$

È facile verificare, ad esempio, che

$$S_4 = S_{12} = \mathbf{S} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = S_{21} = \mathbf{S} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2.$$