

Teoria lineare dei sistemi reticolari

In questo capitolo, scegliendo i sistemi reticolari come categoria strutturale, ci occuperemo di aspetti di carattere generale che riguardano congiuntamente sia il problema statico che quello cinematico. Nel caso di sistemi ad un numero finito di parametri, questi due problemi sono regolati da due sistemi di equazioni algebriche lineari, strettamente correlati, di cui saranno richiamate le proprietà note. Nel prosieguo del capitolo verrà poi risolto il problema elastico specializzato a questa categoria strutturale.

1 Definizione e notazioni

Un sistema reticolare è rappresentato da un insieme di n_n punti, o nodi, nello spazio euclideo tridimensionale \mathcal{E} ,

$$\mathcal{N} = \{P_i \in \mathcal{E}, i = 1, \dots, n_n\},$$

che sono individuati dalle loro coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, e da un insieme \mathcal{A} di n_a travi rettilinee, o aste, che collegano i nodi a coppie,

$$\mathcal{A} = \{(P_i, P_j)_k; P_i, P_j \in \mathcal{N}, k = 1, \dots, n_a\}.$$

Nella notazione utilizzata, il k -esimo elemento collega i nodi i e j . Indicheremo con $\mathbf{e}_{ij} = \text{vers } \overrightarrow{P_i P_j}$ il versore che va da P_i a P_j , mentre $\mathbf{e}_{ji} = -\mathbf{e}_{ij}$ è il versore che ha la stessa direzione ma verso opposto. Le aste sono connesse tra loro nei nodi solamente alle estremità mediante cerniere sferiche. Inoltre, si assume che i carichi esterni siano costituiti soltanto da forze applicate sui nodi (Fig. 1.1(a)).

Ogni asta, tramite le cerniere, è sottoposta a due forze che, poiché sull'asta non agiscono altri carichi, devono essere collineari per soddisfare l'equilibrio alla rotazione intorno ad uno degli estremi (Fig. 1.1(b)). Come conseguenza, l'unica caratteristica di sollecitazione presente nel sistema è lo sforzo normale,

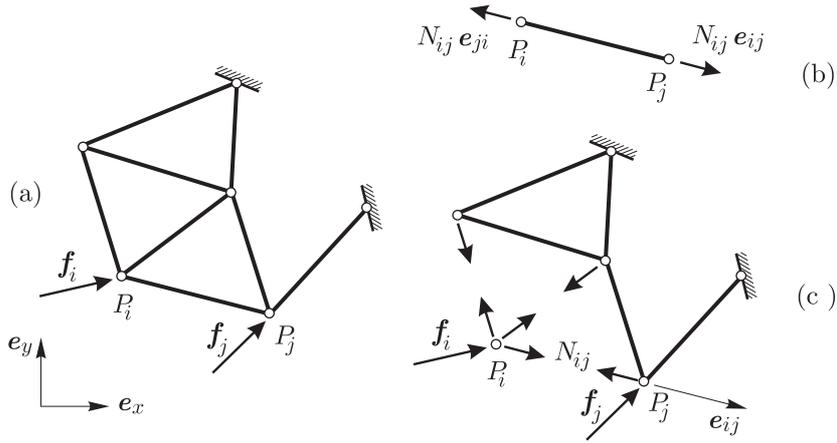


Figura 1.1.

costante in ciascuna asta. Indicheremo con $N_k = N_{ij} = N_{ji}$ lo sforzo normale dell'asta $(P_i, P_j)_k$, positivo se di trazione.

2 Il problema statico

Ai fini delle equazioni di equilibrio, è conveniente considerare i nodi come dei corpi rigidi puntiformi, mentre le aste costituiscono dei pendoli che vincolano i nodi a coppie. Su ogni nodo agiscono quindi delle forze dirette secondo le linee d'asse delle aste (Fig. 1.1(c)). Il sistema allora è in equilibrio se e solo se per ogni nodo il risultante delle forze agenti su di esso è nullo, essendo l'annullamento del momento risultante garantito. Per ogni nodo possiamo quindi scrivere tre equazioni di equilibrio alla traslazione nel caso di sistemi tridimensionali, oppure due equazioni nel caso di sistemi piani. I carichi esterni costituiscono le quantità note, mentre le incognite sono gli sforzi normali nelle aste.

Prendiamo in esame l'arco a tre cerniere nel piano in Fig. 1.2(a). Il nodo 3, collegato a terra da due aste, è sottoposto all'azione del carico generico $\mathbf{f}_3 = f_{3x} \mathbf{e}_x + f_{3y} \mathbf{e}_y$.

L'equilibrio di questo nodo impone che si abbia

$$\mathbf{f}_3 + N_{13} \mathbf{e}_{31} + N_{23} \mathbf{e}_{21} = \mathbf{0}.$$

Considerando che nella base scelta si ha

$$\mathbf{e}_{31} = \text{vers} \overrightarrow{P_3 P_1} = -\cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_{21} = \text{vers} \overrightarrow{P_2 P_1} = \cos \beta \mathbf{e}_x - \sin \beta \mathbf{e}_y,$$

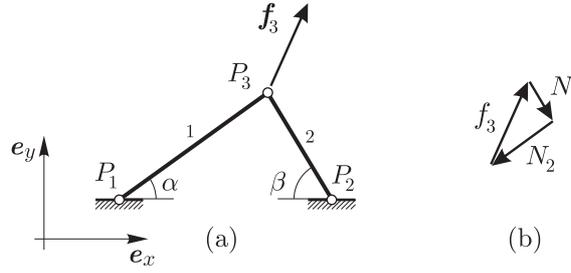


Figura 1.2.

l'equazione di equilibrio si scrive in componenti come

$$f_{3x} - N_{13} \cos \alpha + N_{23} \cos \beta = 0,$$

$$f_{3y} - N_{13} \sin \alpha - N_{23} \sin \beta = 0,$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{13} \\ N_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

La Fig. 1.2(b) mostra la soluzione grafica di questo sistema di equazioni, nel caso che le due aste abbiano inclinazioni diverse: i vettori che rappresentano le forze agenti sul nodo formano un poligono chiuso.

2.1 L'operatore di equilibrio

Vediamo più in dettaglio come si procede alla scrittura sistematica delle equazioni di equilibrio. Considerando il nodo i -esimo, gli sforzi assiali trasmessi dalle aste connesse ad esso dovranno bilanciare il carico esterno \mathbf{f}_i (Fig. 1.1(c)):

$$\sum_j N_{ij} \text{vers} \overrightarrow{P_i P_j} + \mathbf{f}_i = \mathbf{0},$$

ovvero

$$\sum_j N_{ij} \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{f}_i = \mathbf{0}.$$

In queste equazioni la sommatoria è estesa ai soli nodi j connessi al nodo i da un'asta. È conveniente riscrivere l'equazione in questo modo:

$$\sum_j N_{ij} \mathbf{e}_{ji} = \mathbf{f}_i. \quad (2.2)$$

La precedente, scritta per tutti i nodi liberi del sistema, forma un sistema di equazioni lineari che legano gli sforzi normali incogniti alle forze esterne. Se indichiamo con $\boldsymbol{\sigma}$ il vettore che contiene gli sforzi normali di tutte le aste,

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vdots \\ N_k \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

e con \mathbf{f} il vettore che contiene le componenti dei carichi relative a tutti i nodi,

$$\mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \\ f^{(i+1)x} \\ f^{(i+1)y} \\ f^{(i+1)z} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

possiamo scrivere le equazioni di equilibrio nella forma compatta

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \quad (2.5)$$

in cui \mathbf{A} prende il nome di *operatore di equilibrio*. Nell'esempio considerato questo operatore è rappresentato nella base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ dalla matrice in (2.1). Ricordiamo che nel caso di sistemi piani non compaiono le equazioni e le componenti di carico relative alla direzione di \mathbf{e}_z .

Consideriamo ora un paio di esempi per vedere che aspetto assume l'operatore di equilibrio in casi un po' più complessi.

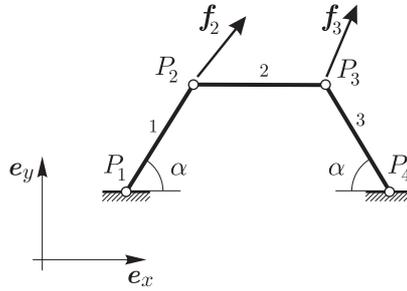


Figura 1.3.

Il sistema composto da tre aste e quattro nodi rappresentato in Fig. 1.3 è sottoposto a carichi generici applicati sui nodi 2 e 3, mentre i nodi 1 e 4 sono vincolati a terra. I versori delle direzioni delle aste sono i seguenti:

$$\mathbf{e}_{12} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{23} &= \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{e}_{34} &= \cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

L'equazione di equilibrio del nodo 2 si scrive facilmente come:

$$N_{12} \mathbf{e}_{12} + N_{23} \mathbf{e}_{32} = \mathbf{f}_2,$$

e quella del nodo 3:

$$N_{23} \mathbf{e}_{23} + N_{34} \mathbf{e}_{43} = \mathbf{f}_3.$$

In questo caso l'operatore di equilibrio è rappresentato dalla matrice

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \cos \alpha & -1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

ed i vettori $\boldsymbol{\sigma}$ ed \mathbf{f} sono dati rispettivamente da

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix}.$$

A questo punto possiamo chiederci quali siano le soluzioni del problema lineare (2.5), e cioè, assegnati i carichi esterni è possibile determinare gli sforzi nelle aste? La risposta è fornita dal Teorema di Rouché–Capelli¹: se la matrice completa del sistema ha caratteristica uguale a quella della matrice che rappresenta \mathbf{A} allora esiste almeno una soluzione. In questo caso è facile vedere come la matrice (2.6) abbia caratteristica massima, pari a tre (basta verificare che il determinante di una sottomatrice 3×3 sia diverso da zero), e quindi per avere soluzioni la matrice completa non deve avere caratteristica massima (essendo una matrice 4×4 , deve avere determinante pari a zero). Questo significa anche che le colonne della matrice completa devono essere linearmente dipendenti, cosa che tra l'altro è sott'intesa dalla (2.5): il vettore dei carichi esterni deve essere una combinazione lineare delle colonne della matrice che rappresenta \mathbf{A} .

Vediamo ora il caso del sistema in Fig. 1.4(a). Il sistema è composto da tre aste connesse allo stesso nodo libero ad una estremità, e che sono vincolate a terra all'altra estremità. Consideriamo ancora un carico generico applicato sull'unico nodo libero. L'operatore di equilibrio ed i vettori $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{f} assumono ora l'aspetto seguente:

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \sin \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{bmatrix},$$

¹ Vedere gli Appunti di MS1.

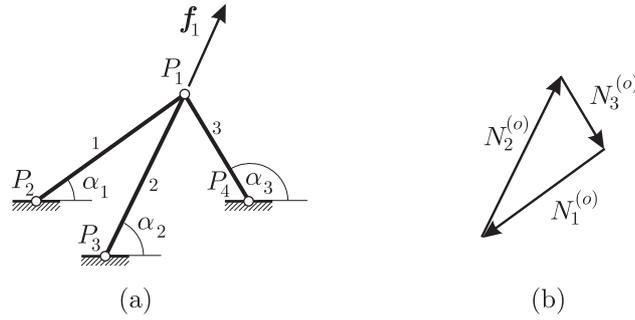


Figura 1.4.

dove α_k è l'angolo che l'asta k -esima forma con e_x . In questo caso, se almeno due di questi angoli sono diversi, abbiamo che la matrice ha caratteristica massima, pari a 2, la matrice completa 2×4 avrà caratteristica uguale e quindi esistono sempre le soluzioni del problema (2.5). Inoltre, poichè la caratteristica della matrice è inferiore al numero delle incognite, pari a $3 = n_a$, si avranno infinite soluzioni.

Come noto dai corsi di algebra, la forma più generale della soluzione di (2.5) è la seguente:

$$\sigma = \sigma^{(o)} + \sigma^{(p)}, \quad (2.7)$$

dove $\sigma^{(o)}$ è la soluzione del sistema omogeneo $A\sigma = 0$, mentre $\sigma^{(p)}$ è una arbitraria soluzione particolare di (2.5). Ad esempio, la soluzione $\sigma^{(o)}$ può essere costruita facilmente per via grafica imponendo che le forze trasmesse dalle sole aste al nodo siano in equilibrio, senza considerare alcun carico (Fig. 1.4(b)). La soluzione particolare può essere scelta arbitrariamente, ad esempio, assumendo $N_3^{(p)} = 0$ ed imponendo l'equilibrio tra $N_1^{(p)}$, $N_2^{(p)}$ e f_1 . Notiamo che sarebbe del tutto equivalente effettuare una qualsiasi altra scelta di $\sigma^{(p)}$ in equilibrio con f_1 . La soluzione $\sigma^{(o)}$ prende il nome di *stato di sollecitazione autoequilibrato* o anche *stato di presollecitazione*: esso è uno stato di sollecitazione in equilibrio, senza che nessun carico agisca sulla struttura. Ad esempio, per immaginare uno stato di sollecitazione siffatto, consideriamo l'arco a tre cerniere costituito solamente dalle aste 1 e 3, se le aste sono rigide il sistema ammetterà solo spostamenti nulli. Prendiamo ora una molla estensionale e connettiamone un estremo al nodo libero, e l'altro estremo a terra, in modo che la lunghezza ℓ della molla in questa configurazione sia diversa dalla lunghezza $\bar{\ell}$ che la molla possiede a riposo, ad esempio $\ell < \bar{\ell}$ come in Fig. 1.5(a). Il sistema sarà allora sollecitato da forze interne anche in assenza di carichi esterni. Possiamo a questo punto chiederci se esista uno stato di sollecitazione autoequilibrato nei casi di Fig. 1.2 e di Fig. 1.3. Si può ben immaginare come l'operazione sopra descritta non sia possibile e che quindi questo stato di sollecitazione non esista: se sostituiamo un elemento con una molla di lunghezza a riposo inferiore a quella che dovrebbe avere per essere connessa al sistema, allora il sistema

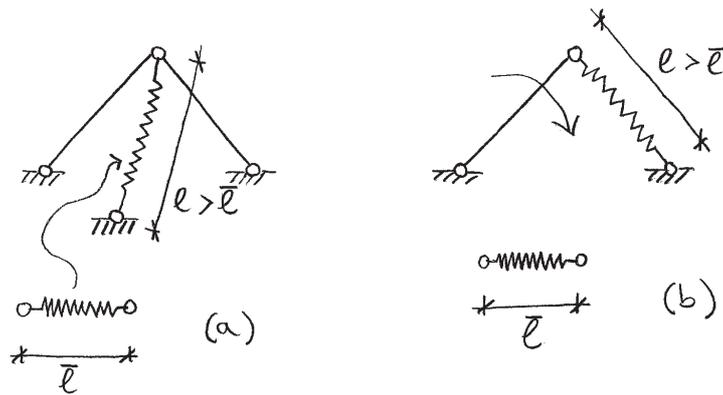


Figura 1.5.

non potrà essere in equilibrio poiché tenderà a spostarsi dalla configurazione in questione (Fig. 1.5(b)). Avremo modo di approfondire questi concetti in seguito.

3 Il problema cinematico

Se consideriamo una singola asta rigida, di estremi P_i e P_j , entrambi liberi, allora sappiamo che il suo campo di velocità sarà tale che la velocità relativa tra i suoi due estremi sia diretta ortogonalmente alla direzione dell'asta stessa. Infatti, essendo il campo di velocità rigido, si ha:

$$\mathbf{v}(P_j) = \mathbf{v}(P_i) + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{P_i P_j},$$

cioè

$$\mathbf{v}(P_j) - \mathbf{v}(P_i) = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{P_i P_j},$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore velocità angolare dell'asta rigida. La precedente, per le proprietà del prodotto vettoriale, implica che

$$(\mathbf{v}(P_j) - \mathbf{v}(P_i)) \cdot \overrightarrow{P_i P_j} = 0. \quad (3.8)$$

Supponiamo ora che l'asta non sia rigida ma che, rimanendo rettilinea, possa presentare una variazione di lunghezza Δl_{ij} , positiva, in caso di allungamento, o negativa, in caso di accorciamento. A questo punto l'equazione (3.8) va modificata per tenere conto del fatto che le velocità nodali degli estremi dell'asta devono essere compatibili con la velocità di allungamento dell'asta stessa. Per fare ciò, consideriamo un moto del sistema in funzione del tempo, che indichiamo con t . La lunghezza della k -esima asta, di estremi P_i e P_j sarà data da

$$\ell_{ij} = |\overrightarrow{P_i P_j}| = |P_j - P_i|, \quad (3.9)$$

dove tutte le quantità sono funzioni del tempo. Consideriamo ora il quadrato di questa quantità,

$$\ell_{ij}^2 = (P_j - P_i) \cdot (P_j - P_i), \quad (3.10)$$

per calcolarne la derivata rispetto al tempo,

$$\begin{aligned} (\ell_{ij}^2) \dot{} &= 2\ell_{ij}\dot{\ell}_{ij} = 2(\dot{P}_j - \dot{P}_i) \cdot (P_j - P_i) \\ &= 2(\mathbf{v}(P_j) - \mathbf{v}(P_i)) \cdot (P_j - P_i). \end{aligned}$$

Otteniamo così la relazione che lega la velocità di allungamento dell'asta alle velocità $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(P_i)$ e $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}(P_j)$ dei suoi punti estremi:

$$\dot{\ell}_{ij} = \frac{1}{\ell}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot (P_j - P_i) \quad (3.11)$$

oppure

$$\dot{\ell}_{ij} = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \text{vers} \overrightarrow{P_i P_j}. \quad (3.12)$$

Moltiplicando ambo i membri della precedente per un intervallo di tempo molto piccolo, Δt , possiamo scrivere la relazione analoga, valida per un piccolo allungamento $\Delta\ell_{ij} \simeq \dot{\ell}_{ij}\Delta t$ e piccoli spostamenti $\mathbf{u}_i \simeq \mathbf{v}_i\Delta t$ dei nodi:

$$\Delta\ell_{ij} = (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \text{vers} \overrightarrow{P_i P_j}. \quad (3.13)$$

Le relazioni (3.12) e (3.13) mostrano che $\dot{\ell}_{ij}$ [$\Delta\ell_{ij}$] dipende dalla proiezione

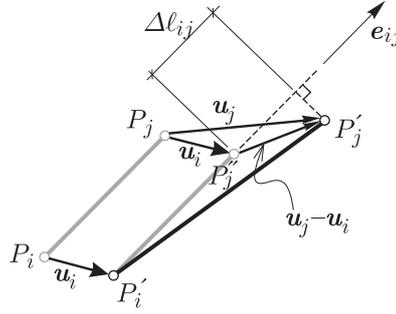


Figura 1.6.

della velocità relativa [spostamento relativo] tra P_i e P_j secondo la direzione dell'asta (Fig. 1.6). In particolare, la velocità relativa è ortogonale all'asta quando $\Delta\ell_{ij} = 0$, ritrovando così la (3.8). Osserviamo come scambiando gli indici i e j le equazioni (3.12) e (3.13) restino inalterate. Possiamo riconoscere nella (3.13) la quantità $\varepsilon_{ij} = \Delta\ell_{ij}$ introdotta come parametro di deformazione

di una molla estensionale² di estremi P_i e P_j . L'equazione precedente può allora essere riscritta nella forma

$$\varepsilon_{ij} = (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{e}_{ij}, \quad (3.14)$$

e prende il nome di *equazione di compatibilità cinematica* dell'asta (P_i, P_j) .

È bene precisare in che senso abbiamo detto che gli spostamenti e gli allungamenti nelle (3.13), (3.14) sono “piccoli”. Ovviamente, il concetto di “piccolezza” è un concetto relativo. Consideriamo una funzione scalare di una variabile $\phi(t)$ (dove la variabile t non rappresenta necessariamente il tempo) e consideriamo la differenza tra i valori che questa funzione assume in $t = t_0$ fissato e t generico, $\Delta\phi(t) = \phi(t) - \phi(t_0)$. Effettuando uno sviluppo in serie di Taylor rispetto a t_0 , possiamo scrivere:

$$\Delta\phi(t) = \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t_0} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dt^2} \right|_{t_0} (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\phi}{dt^3} \right|_{t_0} (\Delta t)^3 + \dots,$$

con $\Delta t = t - t_0$. Poniamo $\Delta t = \delta \bar{t}$, con \bar{t} un intervallo di riferimento e δ un parametro adimensionale. A questo punto, fare l'ipotesi che l'intervallo Δt sia piccolo equivale ad affermare che δ è molto minore dell'unità. Si ha allora che δ^2 è trascurabile rispetto all'unità e che nello sviluppo precedente i termini contenenti potenze di Δt superiori alla prima sono trascurabili. Possiamo così scrivere

$$\Delta\phi(t) \simeq \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t_0} \Delta t.$$

Riprendiamo il caso dell'arco a tre cerniere in Fig. 1.2 e scriviamo le equazioni di compatibilità per le due aste. La (3.14) scritta per i due elementi del sistema fornisce

$$\varepsilon_{13} = (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{e}_{13} = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_{13},$$

$$\varepsilon_{23} = (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{e}_{23} = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_{23},$$

dato che P_1 e P_2 non si spostano. Sostituendo le espressioni dei versori \mathbf{e}_{13} , \mathbf{e}_{23} , possiamo scrivere

$$u_{3x} \sin \alpha + u_{3y} \cos \alpha = \varepsilon_{13},$$

$$u_{3x} \sin \beta - u_{3y} \cos \beta = \varepsilon_{23}$$

quindi, in forma matriciale abbiamo

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

² Vedere gli Appunti di MS1.

Questo sistema di equazioni specifica il *problema cinematico* per l'arco a tre cerniere: una volta assegnate le variazioni di lunghezza delle aste, ε_{13} , ε_{23} , è possibile individuare lo spostamento del nodo libero in modo compatibile con questa assegnazione? Come per il problema statico, se le aste hanno inclinazioni diverse, allora è sempre possibile determinare in modo unico la soluzione di questo problema. In Fig. 1.7(a) vediamo graficamente come sia individuata la posizione del punto P_3 , il quale si trova all'intersezione delle due traiettorie circolari fittizie di raggi $(\ell_{13} + \Delta\ell_{13})$, $(\ell_{23} + \Delta\ell_{23})$ e centri P_1 , P_2 rispettivamente. Si noti che l'equazione (3.14) è valida in un regime di piccoli spostamenti ed allungamenti, per cui lo spostamento dell'estremità delle aste va considerato secondo la direzione ortogonale alle aste stesse. Ciò vuol dire che gli archi di circonferenza della Fig. 1.7(a) vengono approssimati dalle loro tangenti, come illustrato in Fig. 1.7(b).

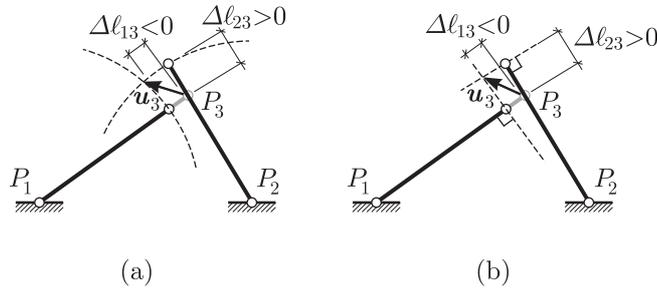


Figura 1.7.

3.1 L'operatore di compatibilità cinematica

Le (3.12), (3.13) scritte per tutte le aste, forniscono le equazioni di compatibilità cinematica dell'intero sistema reticolare. Raccogliendo nei vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} le componenti delle velocità e degli spostamenti assoluti di tutti i nodi,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \vdots \\ v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ v_{(i+1)x} \\ v_{(i+1)y} \\ v_{(i+1)z} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \\ u_{(i+1)x} \\ u_{(i+1)y} \\ u_{(i+1)z} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

e nei vettori $\dot{\varepsilon}$ e ε , le velocità di allungamento e gli allungamenti di tutte le aste,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dot{\ell}_k \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta\ell_k \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

possiamo scrivere in forma compatta

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.18)$$

dove \mathbf{B} prende il nome di *operatore di congruenza* o di *compatibilità cinematica*. Nell'esempio precedente questo operatore è rappresentato nella base $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ dalla matrice nella (3.15).

Vediamo ora come è rappresentato l'operatore di congruenza nel caso dei sistemi già visti in precedenza.

Per il sistema in Fig. 1.3 le equazioni di compatibilità relative alle tre aste sono le seguenti:

$$\varepsilon_{12} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{e}_{21},$$

$$\varepsilon_{23} = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{e}_{32},$$

$$\varepsilon_{34} = (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4) \cdot \mathbf{e}_{43},$$

e quindi,

$$\varepsilon_{12} = \cos \alpha u_{2x} + \sin \alpha u_{2y},$$

$$\varepsilon_{23} = -u_{2x} + u_{3x},$$

$$\varepsilon_{34} = -\cos \alpha u_{3x} + \sin \alpha u_{3y}.$$

L'operatore di congruenza ed i vettori \mathbf{u} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ hanno allora l'aspetto seguente:

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{34} \end{bmatrix}.$$

In questo caso la matrice del sistema ha caratteristica massima, pari a 3, la matrice completa 3×5 avrà la stessa caratteristica e quindi esistono sempre le soluzioni del problema (3.18)₂. Inoltre, poichè la caratteristica della matrice è inferiore al numero delle incognite, pari a $4 = 2n_n$, si avranno infinite soluzioni, le quali, come abbiamo visto, hanno la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(o)} + \mathbf{u}^{(p)}, \quad (3.19)$$

dove $\mathbf{u}^{(o)}$ è la soluzione del sistema omogeneo $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, mentre $\mathbf{u}^{(p)}$ è una arbitraria soluzione particolare di (3.18)₂. La soluzione $\mathbf{u}^{(o)}$ è rappresentata in Fig. 1.8.

Passiamo ad esaminare il sistema in Fig. 1.4. L'operatore di compatibilità ed i vettori \mathbf{u} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ hanno ora l'aspetto seguente:

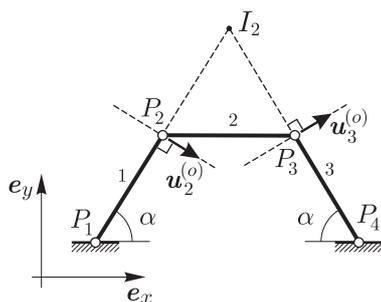


Figura 1.8.

$$B \equiv \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad u \equiv \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \end{bmatrix}.$$

In questo caso, se almeno due aste hanno inclinazioni differenti, la matrice del sistema ha caratteristica massima, pari a due. Per avere soluzioni la matrice completa, 3×3 , non deve avere caratteristica massima. Questo significa anche che le colonne della matrice completa devono essere linearmente dipendenti: il vettore ε deve essere una combinazione lineare delle colonne della matrice che rappresenta B . In Fig. 1.9 è illustrata la situazione in cui ciò non avviene, gli allungamenti assegnati non sono compatibili con nessuno spostamento del nodo libero.

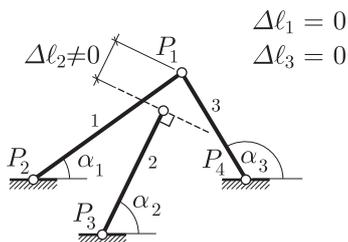


Figura 1.9.

4 Equilibrio, compatibilità cinematica e principio delle potenze

Nei due paragrafi precedenti abbiamo implicitamente introdotto i seguenti spazi vettoriali:

$$V_a = \text{spazio vettoriale delle aste,}$$

$V_n =$ spazio vettoriale dei nodi.

Su questi spazi vettoriali agiscono gli operatori lineari:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : V_a &\longrightarrow V_n \\ \boldsymbol{\sigma} &\longmapsto \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} : V_n &\longrightarrow V_a \\ \mathbf{u} &\longmapsto \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}$$

secondo le (2.5), (3.18).

Se il sistema è composto da molti nodi ed elementi, i vettori \mathbf{f} , \mathbf{u} e \mathbf{v} contengono, nello stesso ordine, le componenti relative a tutti i nodi liberi, quindi, nel caso di un sistema piano, la dimensione di V_n è pari a $2n_n$, nel caso di un sistema tridimensionale questa dimensione è pari a $3n_n$. Nel seguito indicheremo genericamente con n_l la dimensione di questo sottospazio. Invece, i vettori $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ contengono le quantità relative a tutti gli elementi e la dimensione di V_a è pari a n_a .

OSSERVAZIONI. 1. È bene non confondere un operatore lineare, che costituisce una applicazione tra due spazi lineari, con la sua rappresentazione matriciale, che dipende dalla base scelta. Nel seguito talvolta useremo impropriamente la dizione “la matrice \mathbf{A} ” sottintendendo che ci riferiamo alla rappresentazione matriciale di \mathbf{A} in una certa base.

2. Quando alcuni nodi del sistema sono parzialmente vincolati, per esempio da un carrello, allora conviene introdurre anche un altro numero, n_v , pari al numero di vincoli scalari posti ai nodi del sistema. In questo modo possiamo ottenere la dimensione di V_n , sottraendo al numero di componenti nodali relative a tutti i nodi, il numero di vincoli scalari imposti su di essi: $n_l = 2n_n - n_v$ per un sistema piano, $n_l = 3n_n - n_v$ per un sistema tridimensionale.

Le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} sono strettamente collegate tra di loro. Infatti, vale la relazione

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T, \quad (4.20)$$

come si può dimostrare confrontando le matrici calcolate negli esempi precedenti. Questa relazione vale sotto le seguenti condizioni: (i) la base scelta per esprimere le equazioni di equilibrio e le equazioni di compatibilità cinematica è la stessa; (ii) le convenzioni sui segni di σ_k e ε_k sono concordi, e cioè, se lo sforzo in un’asta è positivo quando è di trazione allora la sua variazione di lunghezza è positiva quando corrisponde ad un allungamento; (iii) le componenti dei vettori $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{f} , \mathbf{u} , \mathbf{v} sono ordinate, rispettivamente, nello stesso modo.

Le equazioni di equilibrio e le equazioni di compatibilità sono in relazione con il principio delle potenze nel modo che illustreremo tra poco. Innanzi tutto, specializziamo il principio delle potenze al caso dei sistemi reticolari. La potenza esterna compiuta dalla forza agente sul nodo i -esimo vale

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

e sommando su tutti i nodi si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n_n} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

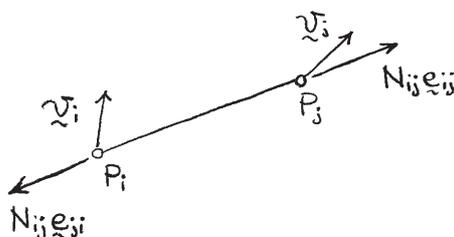


Figura 1.10.

La potenza interna relativa ad un'asta è data da (Fig. 1.10):

$$\mathbf{v}_i \cdot (N_{ij} \mathbf{e}_{ji}) + \mathbf{v}_j \cdot (N_{ij} \mathbf{e}_{ij}) = N_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{e}_{ij} = N_{ij} \dot{\ell}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij},$$

cioè dal prodotto dello sforzo normale dell'asta per la velocità di allungamento di questa. Quindi, sommando su tutte le aste,

$$\sum_{k=1}^{n_a} N_k \dot{\ell}_k = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

Il principio delle potenze si esprime quindi come segue:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

Il principio delle potenze, le equazioni di equilibrio e le equazioni di compatibilità costituiscono tre proposizioni per cui date due di esse può essere ricavata la terza (Fig. 1.11). Vediamo in che modo.

I. Supponiamo che valgano sia le equazioni di equilibrio che quelle di compatibilità, quindi si ha $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$ e $\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Allora, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

ottenendo l'uguaglianza delle potenze interna ed esterna. Nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà del prodotto scalare per cui $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v}$.

II. Supponiamo ora che valgano le equazioni di equilibrio e che valga il principio delle potenze per ogni stato $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f})$ bilanciato. Ciò si esprime come segue:

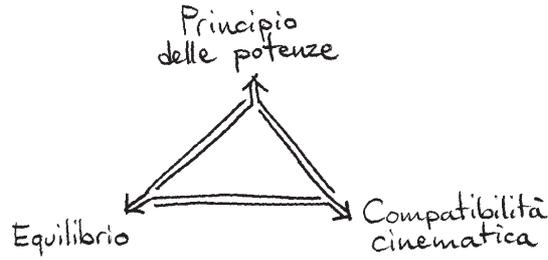


Figura 1.11.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}) : \mathbf{f} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}.$$

Allora, con un semplice passaggio, si ha che

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma},$$

e quindi, data l'arbitrarietà di $\boldsymbol{\sigma}$ si ottiene $\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

III. Supponiamo infine che valgano le equazioni di compatibilità cinematica e che valga il principio delle potenze per ogni stato $(\mathbf{v}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ compatibile. Ciò significa:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall (\mathbf{v}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^T \mathbf{v},$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}$$

e per l'arbitrarietà di \mathbf{v} si ha $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$.

5 Sottospazi fondamentali - Regola di Maxwell estesa

Le caratteristiche di una struttura dipendono dalla sua matrice di equilibrio \mathbf{A} , o dalla matrice di congruenza $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, attraverso quattro sottospazi vettoriali ad essa tipicamente associati: le *immagini* di \mathbf{A} e di \mathbf{A}^T , $\text{Im}\mathbf{A}$, $\text{Im}\mathbf{A}^T$, e i loro *nuclei*³, $\text{Ker}\mathbf{A}$, $\text{Ker}\mathbf{A}^T$, definiti rispettivamente da

$$\text{Im}\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{l} \text{spazio generato} \\ \text{dalle colonne di } \mathbf{A} \end{array} \right\} = \{ \mathbf{f} \in V_n : \mathbf{f} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \in V_a \},$$

$$\text{Im}\mathbf{A}^T = \left\{ \begin{array}{l} \text{spazio generato} \\ \text{dalle colonne di } \mathbf{A}^T \end{array} \right\} = \{ \boldsymbol{\varepsilon} \in V_a : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \mathbf{u} \in V_n \},$$

$$\text{Ker}\mathbf{A} = \{ \text{spazio nullo di } \mathbf{A} \} = \{ \boldsymbol{\sigma} \in V_a : \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \},$$

$$\text{Ker}\mathbf{A}^T = \{ \text{spazio nullo di } \mathbf{A}^T \} = \{ \mathbf{u} \in V_n : \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \}.$$

³ La notazione riprende la parola inglese *kernel*, nocciolo.

I due sottospazi $\text{Im}\mathbf{A}$ e $\text{Ker}\mathbf{A}^T$ sono complementi ortogonali in V_n . Se indichiamo con \mathbf{a}_k il generico vettore colonna di \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} \equiv \left[\begin{array}{c|c} \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \\ \hline \end{array} \right],$$

la condizione $\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ è una condizione di ortogonalità tra \mathbf{u} e tutti i vettori riga di \mathbf{A}^T , cioè i vettori colonna di \mathbf{A} :

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n_a \iff \mathbf{u} \in \text{Ker}\mathbf{A}^T.$$

Quindi, il nucleo di \mathbf{A}^T e l'immagine di \mathbf{A} sono sottospazi ortogonali:

$$\text{Im}\mathbf{A} \perp \text{Ker}\mathbf{A}^T.$$

Anche i due sottospazi $\text{Im}\mathbf{A}^T$ e $\text{Ker}\mathbf{A}$ sono complementi ortogonali in V_a . Infatti, possiamo ripetere lo stesso ragionamento considerando le colonne di \mathbf{A}^T , cioè le righe \mathbf{A} , ottenendo

$$\text{Im}\mathbf{A}^T \perp \text{Ker}\mathbf{A}.$$

Le proprietà di complementarità appena descritte permettono di decomporre in modo unico un vettore appartenente a V_n nella somma di due vettori appartenenti rispettivamente a $\text{Im}\mathbf{A}$ e $\text{Ker}\mathbf{A}^T$. Allo stesso modo un vettore appartenente a V_a può essere decomposto in modo unico nella somma di due vettori appartenenti rispettivamente a $\text{Im}\mathbf{A}^T$ e $\text{Ker}\mathbf{A}$.

Considerando le dimensioni di questi sottospazi vettoriali⁴, si può ricavare una utile regola che permette di ottenere rapidamente delle informazioni di massima su un dato sistema. Le dimensioni dei (sotto)spazi vettoriali sopra menzionati sono indicate come segue:

$$\begin{aligned} n_l &= \dim V_n, \\ n_a &= \dim V_a, \\ r &= \dim \text{Im}\mathbf{A} = \dim \text{Im}\mathbf{A}^T, \\ n_m &= \dim \text{Ker}\mathbf{A}^T, \\ n_s &= \dim \text{Ker}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Il *rango*, r , di \mathbf{A} è pari al massimo numero di colonne linearmente indipendenti o, equivalentemente, è pari al massimo numero di righe linearmente indipendenti⁵, mentre n_m e n_s sono rispettivamente il numero di meccanismi

⁴ La dimensione di un (sotto)spazio vettoriale è pari al massimo numero di vettori linearmente indipendenti contenuti in esso.

⁵ Il rango di una matrice è uguale alla sua caratteristica (vedere gli Appunti di MS1).

linearmente indipendenti ed il numero di stati di sollecitazione autoequilibrati linearmente indipendenti. Per le proprietà di complementarità possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}n_l &= r + n_m, \\n_a &= r + n_s.\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni otteniamo:

$$n_l - n_a = n_m - n_s,$$

che costituisce la cosiddetta *regola di Maxwell in forma estesa*.

OSSERVAZIONE. La regola sopracitata permette di valutare rapidamente soltanto la differenza tra n_m e n_s ma non i loro valori singolarmente; per fare questo occorre determinare il rango r .

5.1 Tre teoremi sugli operatori algebrici lineari

Enunciamo ora tre risultati, di cui ometteremo la dimostrazione. Indichiamo con \mathbf{L} un operatore algebrico lineare che agisce sul vettore \mathbf{x} e produce come risultato il vettore \mathbf{c} :

$$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{c}, \quad (5.21)$$

La precedente rappresenta un generico sistema di equazioni che ha come dato \mathbf{c} e come incognite le componenti di \mathbf{x} .

I. *La soluzione del sistema di equazioni (5.21) non è unica se, e solo se, il sistema omogeneo associato, $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ha una soluzione non nulla.*

Si noti che affermare che la soluzione, se esiste, non è unica non ne garantisce l'esistenza. Gli altri due risultati discendono dalla complementarità di $\text{Im}\mathbf{L}$ e $\text{Ker}\mathbf{L}^T$.

II. *Il sistema di equazioni (5.21) ha soluzione per un dato vettore \mathbf{c} se, e solo se, \mathbf{c} è ortogonale a tutte le soluzioni $\mathbf{y}^{(o)}$ del sistema di equazioni $\mathbf{L}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.*

III. *Se \mathbf{x} e \mathbf{c} hanno la stessa dimensione, cioè se \mathbf{L} è rappresentato da una matrice quadrata, allora ci sono due possibilità, o il sistema (5.21) ha sempre una, unica, soluzione, o il sistema omogeneo associato $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha una soluzione non nulla⁶.*

⁶ Questo risultato è noto anche *teorema dell'alternativa di Fredholm*, dal nome di colui che lo ha generalizzato al caso di operatori lineari di tipo qualsiasi.

6 Classificazione

In base ai risultati presentati nella sezione precedente e poiché tra gli operatori di equilibrio e di congruenza sussiste la relazione $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, possiamo suddividere i sistemi reticolari in quattro classi.

1. \mathbf{A} quadrata di rango massimo.

In questo caso si ha che $n_n = n_a = r$, mentre $n_m = n_s = 0$. Si ha allora che è sempre possibile risolvere in modo unico le equazioni di equilibrio (2.5). Ciò è equivalente ad affermare che è sempre possibile risolvere in modo unico le equazioni di compatibilità cinematica (3.18). Le soluzioni si ottengono attraverso le inverse \mathbf{A}^{-1} , $(\mathbf{A}^T)^{-1}$. In simboli, possiamo scrivere:

$$\frac{\forall \mathbf{f} \in V_n \exists! \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} \in V_a}{\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in V_a \exists! \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \in V_n}.$$

Questa situazione corrisponde a quella dell'esempio in Fig. 1.2 quando le aste non sono collineari.

2. \mathbf{A} di rango massimo con più righe che colonne.

In questo caso si ha che $n_n > n_a = r$, mentre $n_m > 0$ e $n_s = 0$. Il sistema delle equazioni di equilibrio è sovradeterminato ed ammette una, unica, soluzione se e solo se \mathbf{f} appartiene all'immagine di \mathbf{A} , cioè se \mathbf{f} è ortogonale a tutti i vettori nel nucleo di \mathbf{A}^T . Questa condizione si può vedere anche come la condizione per cui i carichi esterni spendono potenza nulla per tutti i meccanismi del sistema. Poiché $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, affermare che il sistema delle equazioni di equilibrio è sovradeterminato è equivalente ad affermare che il sistema delle equazioni di compatibilità è sottodeterminato. La (3.18) ammette sempre ∞^{n_m} soluzioni. In simboli, possiamo scrivere:

$$\frac{\exists! \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \iff \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{(o)} = 0 \forall \mathbf{u}^{(o)} \in \text{Ker} \mathbf{A}^T}{\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in V_a \exists \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(o)} + \mathbf{u}^{(p)} : \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} .}$$

Questa situazione corrisponde a quella dell'esempio in Fig. 1.3 quando almeno due aste non sono collineari.

3. \mathbf{A} di rango massimo con più colonne che righe.

In questo caso si ha che $n_n = r < n_a$, mentre $n_m = 0$ e $n_s > 0$. La situazione è analoga a quella del caso precedente, con la differenza che le equazioni di equilibrio e quelle di congruenza si scambiano di ruolo. Il sistema delle equazioni di equilibrio è sottodeterminato ed ammette sempre ∞^{n_s} soluzioni. Ciò è equivalente ad affermare che il sistema delle equazioni di compatibilità è sovradeterminato. La (2.5) ammette una, unica, soluzione se e solo se $\boldsymbol{\varepsilon}$ appartiene all'immagine di \mathbf{A}^T , cioè se $\boldsymbol{\varepsilon}$ è ortogonale a tutti i vettori nel

nucleo di \mathbf{A} . Questa condizione corrisponde a richiedere che la potenza spesa dagli sforzi autoequilibrati per le deformazioni delle aste sia nulla. In simboli, possiamo scrivere:

$$\frac{\forall \mathbf{f} \in V_n \exists \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(o)} + \boldsymbol{\sigma}^{(p)} : \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}}{\exists! \mathbf{u} : \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \iff \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(o)} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^{(o)} \in \text{Ker} \mathbf{A} .}$$

Questa situazione corrisponde a quella dell'esempio in Fig. 1.4 quando almeno due aste non sono collineari.

4. \mathbf{A} di rango non massimo.

In questo caso si ha $r < n_n, n_a$, mentre $n_m, n_s > 0$. Sia il sistema delle equazioni di equilibrio che quello delle equazioni di congruenza sono contemporaneamente sovra- e sottodeterminati. Le affermazioni dei due casi precedenti valgono contemporaneamente, nel senso precisato di seguito. La soluzione delle equazioni di equilibrio esiste se e solo se \mathbf{f} è nell'immagine di \mathbf{A} , cioè se i carichi esterni spendono potenza nulla per tutti i meccanismi del sistema. In tal caso ci sono ∞^{n_s} soluzioni. Equivalentemente, la soluzione delle equazioni di compatibilità cinematica esiste se e solo se $\boldsymbol{\varepsilon}$ è nell'immagine di \mathbf{A}^T , cioè se gli sforzi autoequilibrati spendono potenza nulla per le deformazioni delle aste. In tal caso ci sono ∞^{n_m} soluzioni. In simboli, si ha:

$$\frac{\exists \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(o)} + \boldsymbol{\sigma}^{(p)} : \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \iff \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{(o)} = 0 \quad \forall \mathbf{u}^{(o)} \in \text{Ker} \mathbf{A}^T}{\exists \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(o)} + \mathbf{u}^{(p)} : \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \iff \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(o)} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^{(o)} \in \text{Ker} \mathbf{A} .}$$

Questa situazione corrisponde a quella del sistema in Fig. 1.2 quando le aste sono collineari. La matrice \mathbf{A} in questo caso diventa

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Il rango della matrice è pari ad uno, l'immagine di \mathbf{A} contiene solamente i vettori che hanno la seconda componente nulla, corrispondenti ad una forza diretta orizzontalmente. Se il carico ha una componente verticale, allora esso non può essere equilibrato dagli sforzi normali delle aste, che sono entrambi diretti orizzontalmente (Fig. 1.12(a)). La soluzione per una forza orizzontale $\mathbf{f}_3 = f_{3x} \mathbf{e}_x$ è data dalla somma $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(o)} + \boldsymbol{\sigma}^{(p)}$ con, ad esempio,

$$\boldsymbol{\sigma}^{(o)} = N_{13}^{(o)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(p)} = \begin{bmatrix} f_{3x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove lo stato di sollecitazione autoequilibrato viene parametrizzato attraverso $N_{13}^{(o)}$ e la soluzione particolare è stata scelta arbitrariamente. Riguardo alla compatibilità cinematica, l'immagine di $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ contiene solamente il vettore che ha componenti uguali e opposte, ciò vuol dire che un'asta si allunga

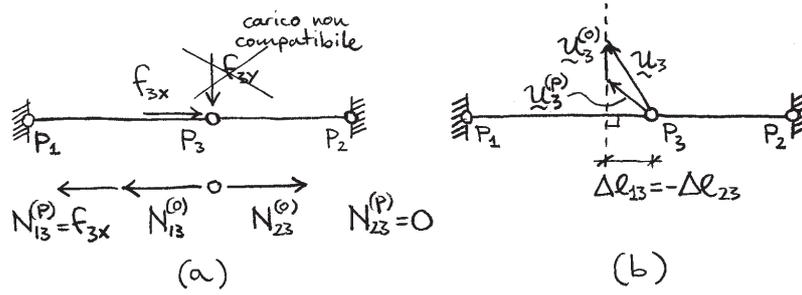


Figura 1.12.

di quanto l'altra asta si accorcia (Fig. 1.12(b)). Se $\Delta l_{13} = -\Delta l_{23}$ allora la soluzione è $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(p)} + \mathbf{u}^{(o)}$, con

$$\mathbf{u}^{(o)} = u_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(p)} = \begin{bmatrix} \alpha l \\ \Delta l_{13} \end{bmatrix},$$

dove il cinematismo ha ampiezza arbitraria u_x . Nella soluzione particolare abbiamo incluso anche una componente secondo il cinematismo, parametrizzata attraverso il coefficiente adimensionale α . La situazione è rappresentata in Fig. 1.12(b), in conseguenza degli allungamenti delle aste, il nodo centrale può assumere una posizione qualsiasi sulla retta tratteggiata, poiché proiettando lo spostamento \mathbf{u} sull'asse comune alle due aste si ottengono sempre gli allungamenti compatibili imposti. La soluzione particolare $\mathbf{u}^{(p)}$ porta il nodo sulla retta, mentre il cinematismo $\mathbf{u}^{(o)}$ sposta il nodo lungo la retta.

OSSERVAZIONE. Nell'ultimo caso non c'è differenza tra matrici quadrate e rettangolari, ciò che conta è che entrambe le dimensioni n_m e n_s sono diverse da zero. Comunque, il fatto di avere una matrice rettangolare, per la regola di Maxwell estesa, implica che almeno una di queste dimensioni non è nulla.

6.1 Il significato fisico dei sottospazi fondamentali

Concludiamo questa sezione illustrando il significato fisico che assumono i quattro sottospazi fondamentali.

Abbiamo già visto che i vettori appartenenti a $\text{Ker} \mathbf{A}^T$ rappresentano i meccanismi del sistema, cioè gli spostamenti che non causano deformazioni nelle aste. La condizione di esistenza delle soluzioni di $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$ ci dice anche che il nucleo di \mathbf{A}^T contiene i vettori \mathbf{f} che non possono essere equilibrati dalla struttura, i *carichi non compatibili*.

Analogamente i vettori in $\text{Ker} \mathbf{A}$ rappresentano gli stati di sollecitazione autoequilibrati, cioè gli stati di sollecitazione in equilibrio con carichi nulli. La condizione di esistenza delle soluzioni di $\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$ ci dice anche che il nucleo di \mathbf{A} contiene i vettori $\boldsymbol{\varepsilon}$ che non permettono di preservare la connettività

della struttura, per cui non è possibile trovare spostamenti che li generano, le *deformazioni non compatibili*.

Abbiamo visto anche che i vettori appartenenti a $\text{Im}\mathbf{A}$ sono quelli per cui è possibile trovare una soluzione alle equazioni di equilibrio, i *carichi compatibili*. Per la complementarità con $\text{Ker}\mathbf{A}^T$, nell'immagine di \mathbf{A} troviamo i vettori \mathbf{u} che causano deformazioni nelle aste.

Analogamente i vettori in $\text{Im}\mathbf{A}^T$ sono quelli per cui è possibile trovare una soluzione alle equazioni di compatibilità cinematica, le *deformazioni compatibili*. Per la complementarità con $\text{Ker}\mathbf{A}$, nell'immagine di \mathbf{A}^T troviamo i vettori $\boldsymbol{\sigma}$ che necessitano di carichi esterni per poter essere in equilibrio.

ESERCIZI

6.1. Per il sistema in Fig. 1.13(a), determinare gli spostamenti dei nodi in seguito ad un allungamento $\Delta\ell_{24} = \delta > 0$ dell'asta (P_2, P_4) . Tutte le altre aste rimangono indeformate.

6.2. Per il sistema in Fig. 1.13(b), determinare gli spostamenti dei nodi in seguito ad un allungamento $\Delta\ell_{25} = -\delta$ dell'asta (P_2, P_5) , con $\delta > 0$. Tutte le altre aste rimangono indeformate.

6.3. Per il sistema in Fig. 1.13(c), con $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/6$, determinare lo spostamento di P_2 in seguito ad un allungamento $\Delta\ell_{34} = \delta > 0$ dell'asta (P_3, P_4) . Tutte le altre aste rimangono indeformate.

6.4. Determinare per quali valori dei parametri di carico p_1 e p_2 i sistemi nelle Figg. 1.13(d, e, f) sono in equilibrio.

6.5. Per il sistema in Fig. 1.13(g), determinare l'allungamento $\Delta\ell_{12}$ compatibile con $\Delta\ell_{13} = \Delta\ell_{14} = \delta > 0$.

6.6. Per il sistema in Fig. 1.13(h), determinare l'allungamento $\Delta\ell_{13}$ compatibile con $\Delta\ell_{24} = \delta > 0$, lasciando inalterate le lunghezze delle altre aste, $\Delta\ell_{12} = \Delta\ell_{25} = 0$.

6.7. Per il sistema in Fig. 1.13(i), determinare l'allungamento $\Delta\ell_{14}$ compatibile con $\Delta\ell_{24} = \delta > 0$, lasciando inalterate le lunghezze delle altre aste, $\Delta\ell_{12} = \Delta\ell_{13} = \Delta\ell_{25} = 0$.

6.8. Analizzare i sistemi nelle Figg. 1.13(j, k), determinando le dimensioni dei sottospazi fondamentali.

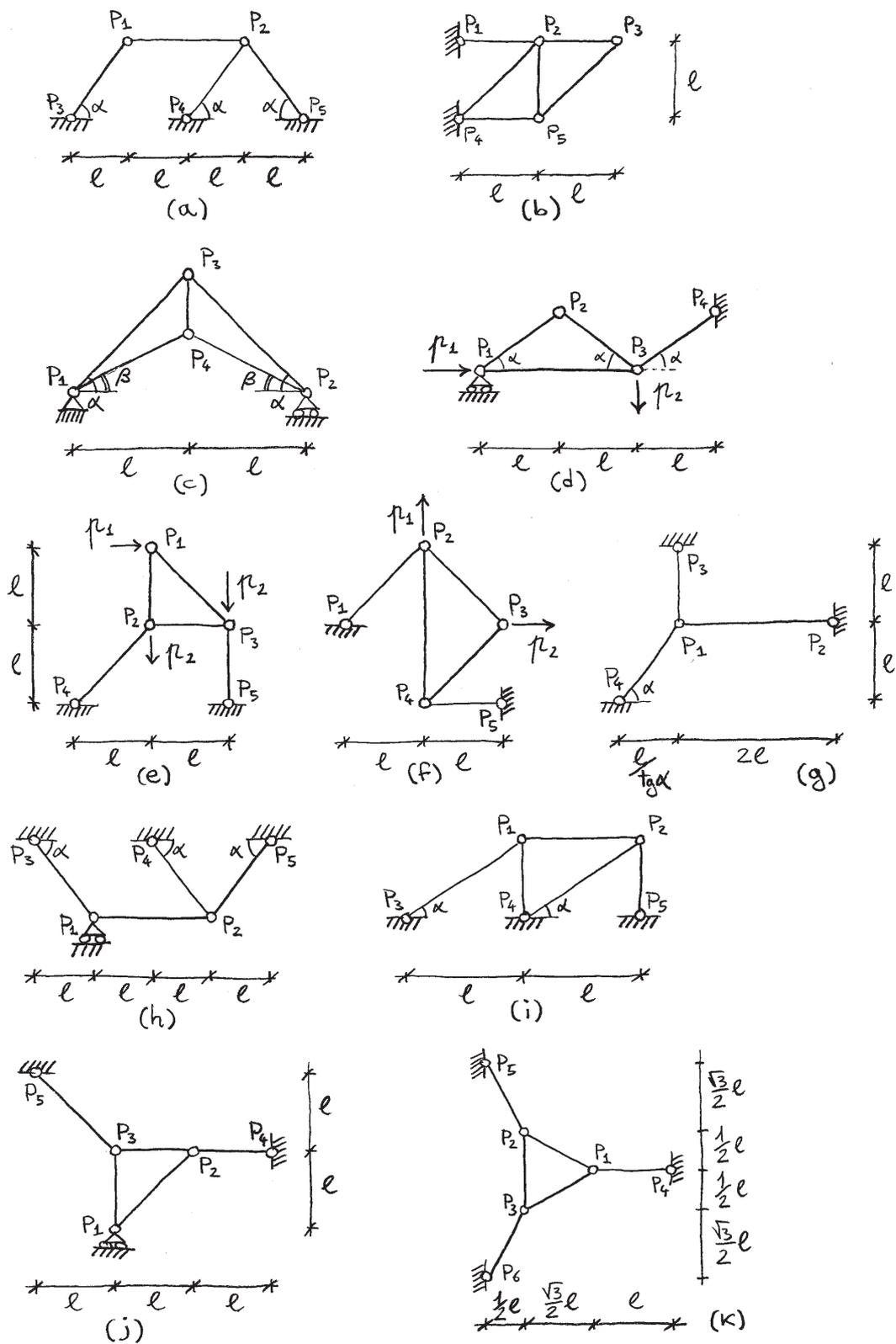


Figura 1.13.

7 Il problema elastico

Consideriamo i due sistemi mostrati in Fig. 1.14. Le equazioni di equilibrio sono le stesse nei due casi, esse prescrivono le condizioni che le reazioni vincolari devono soddisfare per bilanciare il carico esterno. Si tratta quindi di equazioni algebriche lineari. Sappiamo che questo problema di equilibrio ammette ∞^1 soluzioni. Per determinare una soluzione occorre aggiungere ulteriori equazioni che descrivano il comportamento sotto carico degli organi elastici, in un caso, della trave elasticamente deformabile, nell'altro caso. Queste equazioni sono diverse per i due problemi. Nel caso di Fig. 1.14(a), esse sono ancora di tipo algebrico lineare, mentre in Fig. 1.14(b) sono equazioni differenziali ordinarie.



Figura 1.14.

Nel caso particolare dei sistemi reticolari, l'ipotesi di carichi applicati solo sui nodi, fa sì che le equazioni aggiuntive siano ancora algebriche. Consideriamo l'asta deformabile in Fig. 1.15, caricata assialmente. Come abbiamo visto⁷ la relazione che lega lo sforzo normale ai carichi esterni è di tipo differenziale:

$$N'(s) = -p, \quad a < s < b$$

$$N'(s) = 0, \quad 0 < s < a, \quad b < s < s_f, \quad s_f < s < l;$$

inoltre dobbiamo aggiungere la condizione di salto dovuta alla forza concen-

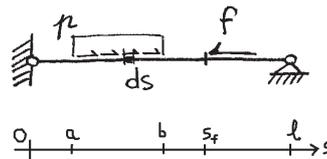


Figura 1.15.

trata, $[[N(s_f)]] = F$. Per trovare l'allungamento dell'asta occorre tenere conto

⁷ Vedi gli Appunti di MS1.

della deformabilità di un elemento di trave ds sotto l'azione dello sforzo $N(s)$. L'allungamento $d\ell$ di questo elemento viene di solito messo in relazione allo sforzo normale come segue (Fig. 1.16):

$$d\ell = \frac{N(s)}{\rho_E(s)} ds,$$

ovvero,

$$\ell'(s) = \frac{N(s)}{\rho_E(s)},$$

dove $\rho_E(s)$ è la *rigidezza estensionale* dell'asta nella sezione trasversale di ascissa s . Se i carichi sono applicati solo agli estremi dell'asta, si ottiene che

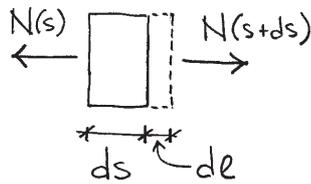


Figura 1.16.

$N(s)$ è costante e l'allungamento complessivo sarà dato da:

$$\Delta\ell = \int_0^\ell d\ell = N \int_0^\ell \frac{1}{\rho_E(s)} ds.$$

In analogia con quanto visto per le molle estensionali, definiamo

$$\frac{1}{k} := \int_0^\ell \frac{1}{\rho_E(s)} ds,$$

in modo che k rappresenti la rigidezza complessiva dell'asta. Quindi, ogni asta

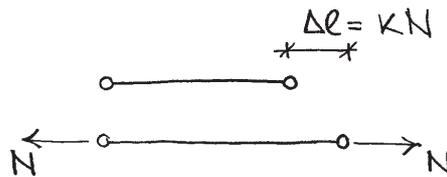


Figura 1.17.

di un sistema reticolare caricato nei nodi può essere considerata come una

molla estensionale di costante di rigidità assegnata (Fig. 1.17). Scriviamo per l'asta h -esima:

$$\Delta \ell_h = \frac{N_h}{k_h},$$

oppure, introducendo l'operatore diagonale \mathbf{C} ,

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} 1/k_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/k_{n_e} \end{bmatrix},$$

scriviamo per tutte le aste

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}.$$

Il problema elastico per un sistema reticolare, cioè il problema di determinare gli sforzi, le deformazioni e gli spostamenti di un dato sistema sottoposto a dei carichi esterni, può essere risolto adoperando uno qualsiasi dei metodi studiati nel corso di Meccanica dei Solidi 1. Ad esempio, utilizzando il principio delle potenze scriviamo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \forall \mathbf{v}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^T \mathbf{v},$$

che diventa,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}\mathbf{A}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v}.$$

Dall'arbitrarietà di \mathbf{v} si ricava:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{u},$$

dove l'operatore $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T$ prende il nome di operatore di rigidità del sistema considerato. Si può dimostrare che se il sistema non ammette meccanismi, allora questo operatore è invertibile e possiamo calcolare

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$$

e di seguito

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Utilizziamo ora un diverso metodo, detto *metodo delle forze*. Supponiamo che il sistema non abbia meccanismi e che il sistema delle equazioni di equilibrio sia sottodeterminato con ∞^1 soluzioni. La soluzione generale di queste equazioni ha la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha \boldsymbol{\sigma}^{(o)} + \boldsymbol{\sigma}^{(p)},$$

dove le ∞^1 soluzioni sono parametrizzate attraverso α , $\boldsymbol{\sigma}^{(o)}$ è uno stato di sollecitazione autoequilibrato e $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}$ una soluzione particolare, arbitraria ma fissata. La deformazione delle aste dovuta allo sforzo presente in esse vale:

$$\varepsilon = \mathbf{C}\sigma.$$

Le deformazioni devono rispettare le equazioni di compatibilità cinematica, vale a dire $\varepsilon \in \text{Im}\mathbf{A}^T$, quindi, affinché esista una soluzione occorre rispettare la condizione di ortogonalità:

$$\varepsilon \cdot \sigma^{(o)} = 0, \quad \sigma^{(o)} \in \text{Ker}\mathbf{A},$$

Sostituendo le relazioni precedenti in quest'ultima condizione, troviamo:

$$\mathbf{C}(\alpha\sigma^{(o)} + \sigma^{(p)}) \cdot \sigma^{(o)} = 0.$$

La precedente permette di ricavare il parametro incognito α e di seguito di ricavare le deformazioni,

$$\varepsilon = \mathbf{C}\sigma.$$

Gli spostamenti si trovano dalle equazioni di compatibilità cinematica, $\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \varepsilon$, le quali, per come è stato individuato ε , hanno un'unica soluzione.

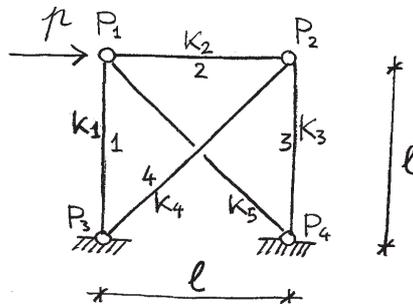


Figura 1.18.

Applichiamo quanto appena esposto ad un esempio. Il sistema in Fig. 1.18 è sottoposto all'azione del carico p . Vogliamo determinare gli spostamenti dei nodi sapendo che le rigidezze delle aste valgono rispettivamente

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2k, \quad k_4 = k_5 = k.$$

L'equilibrio dei nodi impone che si abbia

$$p + N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0,$$

$$-N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0$$

per il primo nodo e

$$-N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 = 0,$$

$$-N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 = 0$$

per il secondo nodo. In forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Questo sistema ammette ∞^1 soluzioni, che hanno la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(o)} + \boldsymbol{\sigma}^{(p)}.$$

Scegliendo $N_2^{(o)} = N_0$, otteniamo per la soluzione del sistema omogeneo

$$\boldsymbol{\sigma}^{(o)} \equiv N_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix};$$

scegliendo $N_2^{(p)} = 0$ nella soluzione particolare si ha:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(p)} \equiv \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}p \end{bmatrix}.$$

Gli sforzi nella asta produrranno le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$, cioè:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k}(N_0 + p) \\ \frac{1}{2k}N_0 \\ \frac{1}{2k}N_0 \\ -\frac{1}{k}\sqrt{2}N_0 \\ -\frac{1}{k}\sqrt{2}(N_0 + p) \end{bmatrix}.$$

Queste deformazioni, per essere cinematicamente compatibili, devono soddisfare la condizione $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(o)} = 0$, da cui si ricava:

$$\frac{N_0}{k} \left(N_0 \left(\frac{3}{2} + 4 \right) + p \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right) = 0,$$

quindi

$$N_0 = -\frac{5}{11}p.$$

Lo stato di sollecitazione è quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{p}{11} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -5 \\ 5\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

mentre le deformazioni sono date da:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{p}{22k} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -5 \\ 10\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

Per ricavare gli spostamenti occorre risolvere le equazioni di compatibilità, le quali, trasponendo la matrice delle equazioni di equilibrio calcolata in precedenza, si scrivono come segue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}.$$

Dalla prima equazione, si ha:

$$u_{1y} = \frac{3}{11} \frac{p}{k};$$

dalla quinta equazione,

$$-u_{1x} + u_{1y} = -\frac{12}{11} \frac{p}{k},$$

otteniamo:

$$u_{1x} = \frac{15}{11} \frac{p}{k}.$$

La terza equazione fornisce:

$$u_{2y} = -\frac{5}{22} \frac{p}{k};$$

dalla quarta equazione,

$$u_{2x} + u_{2y} = \frac{10}{11} \frac{p}{k},$$

si ha:

$$u_{2x} = \frac{25}{22} \frac{p}{k}.$$

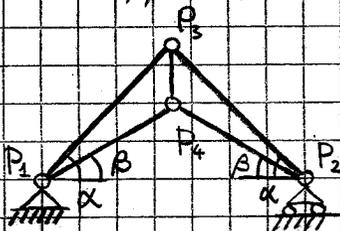
La seconda equazione, l'ultima a disposizione, è automaticamente soddisfatta e può essere usata come verifica:

$$-u_{1x} + u_{2x} = \left(-\frac{15}{11} + \frac{25}{22} \right) \frac{p}{k} = -\frac{5}{22} \frac{p}{k}.$$

ESERCIZIO

(SISTEMA SEMPLICE)

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$$



$$e_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad e_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad e_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$e_{14} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad e_{24} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Trovare lo spostamento di P_2 causato da un allungamento δ dell'asta (P_3, P_4) .

$$(u_{2y} = 0)$$

$$0 = E_{12} = (u_3 - u_1) \cdot e_{12}$$

$$0 = E_{23} = (u_3 - u_2) \cdot e_{23}$$

$$0 = E_{14} = (u_4 - u_1) \cdot e_{14}$$

$$0 = E_{24} = (u_4 - u_2) \cdot e_{24}$$

$$\delta = E_{34} = (u_4 - u_3) \cdot e_{34}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{3y} = \delta + u_{4y}$$

$$u_{3x} = -\delta - u_{4x}$$

$$u_{2x} = u_{3x} - u_{4y} \Rightarrow u_{2x} = -\delta - 2u_{4y}$$

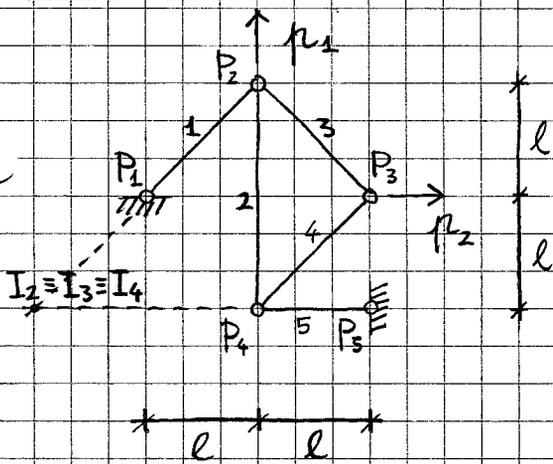
$$\frac{\sqrt{3}}{2}(-\delta - 2u_{4y}) = \frac{\sqrt{3}}{2}u_{4x} - \frac{1}{2}u_{4y} \Rightarrow -\sqrt{3}(\delta + 2u_{4y}) = \sqrt{3}u_{4x} - u_{4y} = \sqrt{3}u_{4x}$$

$$u_{4y} = -\sqrt{3}u_{4x} \Rightarrow u_{4x} = \frac{-\delta}{1-\sqrt{3}} - \frac{\delta}{\sqrt{3}-1}$$

$$u_4 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$u_{2x} = -\delta + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \delta = -\delta \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \delta$$

ESERCIZIO



Determinare r_1 e r_2 in modo tale che il sistema sia in equilibrio.

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(n_e - n_a = 1 = n_m - n_s \right) \Rightarrow \text{esiste almeno un meccanismo}$$

$$\underline{f} \in \text{Im } \underline{A} \iff \underline{f} \cdot \underline{u}^{(0)} = 0 \quad \forall \underline{u}^{(0)} \in \text{Ker } \underline{A}^T$$

Il triangolo composto dalle aste 2, 3, 4 può ruotare intorno a I_2 senza che nessuna delle aste subisca variazioni di lunghezza.

$$\underline{u}_i^{(0)} = \varphi \underline{e}_3 \times \overrightarrow{I_2 P_i}, \quad i=2,3,4$$

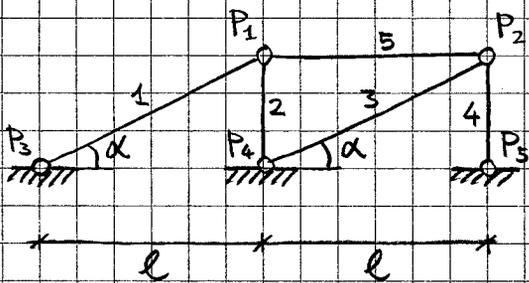
$$\text{Ker } \underline{A}^T \ni \underline{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \end{bmatrix} = \varphi l \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

↑
meccanismo

$$\underline{f} \cdot \underline{u}^{(0)} = 0 \iff \varphi l (2r_1 - r_2) = 0$$

$$\boxed{r_2 = 2r_1}$$

ESERCIZIO

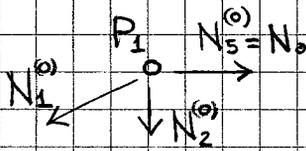


Determinare l'allungamento ε_2 compatibile con $\varepsilon_3 = \delta$, lasciando inalterate le lunghezze delle altre aste, $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

$$\underline{\varepsilon} \in \text{Im } \underline{B} \iff \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\sigma}^{(0)} = 0 \quad \forall \underline{\sigma}^{(0)} \in \text{Ker } \underline{A}$$

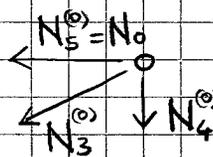
$$\left(n_e - n_a = -1 = n_m - n_s \rightarrow \text{esiste almeno uno stato di presollecitazione} \right)$$

Per determinare $\underline{\sigma}^{(0)}$ possiamo porre, ad esempio, $N_5^{(0)} = N_0$ e risolvere le equazioni di equilibrio (perché in questo caso $n_s = 1, n_m = 0$).



$$N_2^{(0)} = -\text{tg} \alpha N_0$$

$$N_1^{(0)} = \frac{N_0}{\cos \alpha}$$



$$N_4^{(0)} = \text{tg} \alpha N_0$$

$$N_3^{(0)} = -\frac{1}{\cos \alpha} N_0$$

$$\text{Ker } \underline{A} \ni \underline{\sigma}^{(0)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = N_0 \begin{bmatrix} 1/\cos \alpha \\ -\text{tg} \alpha \\ -1/\cos \alpha \\ \text{tg} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\sigma}^{(0)} = 0 \iff N_0 \left(-\text{tg} \alpha \varepsilon_2 - \frac{1}{\cos \alpha} \delta \right) = 0$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = -\frac{1}{\sin \alpha} \delta}$$