

---

## Dinamica di Strutture a Parametri Concentrati

Quando parte dei dati dipende dal tempo, la determinazione di deformazione e sforzi in una struttura richiede di formulare e risolvere un appropriato *problema di evoluzione*.

Le equazioni del problema sono di solito versioni particolari di due principi generali formulati da Eulero: i bilanci della *quantità di moto* e del *momento della quantità di moto*. L'aspetto matematico di tali equazioni di bilancio dipende dal tipo di modello strutturale che si ritiene conveniente impiegare: sono equazioni differenziali ordinarie, se il modello prescelto è a *deformabilità concentrata*; equazioni alle derivate parziali, se il modello è a *deformabilità diffusa*. Nel primo caso, lo stato del sistema è descritto per mezzo di una lista finita di funzioni del tempo che prescrivono il valore dei parametri scalari necessari ad ogni istante dell'intervallo di osservazione; nel secondo, da una lista di campi, cioè, di funzioni dello spazio e del tempo.

Si consideri l'esempio di Fig. ??, dove una struttura a mensola soggetta a un carico variabile nel tempo è modellata sia concentrandone la deformabilità nella sezione di vincolo sia attribuendole deformabilità diffusa. In entrambi i casi, l'evoluzione temporale della struttura viene regolata dal principio di bilancio del momento della quantità di moto; in entrambi i casi, si vuole determinare  $w(x, t)$ , il campo degli spostamenti verticali dei punti della mensola. Per il modello di mensola a deformabilità diffusa, questo si ottiene risolvendo un'equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico; per quello a deformabilità concentrata, si può contare su una parziale rappresentazione preliminare per il campo di spostamenti in questione, del tipo  $w(x, t) \simeq x\varphi(t)$ , e la funzione  $t \mapsto \varphi(t)$  si ottiene risolvendo un'equazione alle derivate ordinarie.

Questo nostro studio verterà esclusivamente su *modelli a deformabilità concentrata*, che compiano moti adeguatamente descritti da versioni *lineari* delle equazioni cui si riducono i principi di bilancio.

**Osservazione 1.** I problemi di evoluzione che affronteremo in dettaglio saranno sempre *lineari* e *ben posti*, cioè, secondo una ricetta proposta da Hadamard, problemi lineari per i quali si possa contare su *esistenza* ( $\exists$ ), *unicità* (U) e *di-*

*pendenza continua dai dati* (DC) della soluzione. Val la pena di dare un'idea del requisito di buona posizione per problemi cui si può conferire l'aspetto formale seguente:

$$L[s] = d,$$

dove  $L$  denota un operatore lineare che trasforma la 'soluzione'  $s$  nel 'dato'  $d$ ; risolvere un problema siffatto significa costruire l'applicazione dato  $\mapsto$  soluzione:

$$d \mapsto s = L^{-1}[d],$$

per tutti i dati in un insieme assegnato (qui  $L^{-1}$  designa formalmente l'operatore inverso di  $L$ ). Se nessuna delle situazioni schematicamente rappresentate nella Fig. ?? ha luogo, il problema si dice ben posto.

**Osservazione 2.** Mentre esistenza e unicità sono *proprietà qualitative*, la dipendenza continua è una *proprietà quantitativa*, che si può esprimere come la richiesta che 'dati piccoli inducano soluzioni piccole'. Per una immediata esemplificazione di queste differenze, si supponga che  $L$  sia una matrice  $m \times n$ ,  $d$  un  $m$ -vettore e  $s$  un  $n$ -vettore; allora, l'esistenza di una soluzione è garantita se  $L$  ha rango massimo, l'unicità se, inoltre,  $m = n$ ; d'altra parte, la dipendenza continua è espressa dalla maggiorazione

$$|s|^2 \leq \text{cost.} |d|^2. \quad (4.1)$$

**Osservazione 3.** Quando  $L$  è, come di regola, un operatore differenziale (magari corredato da condizioni iniziali), ha senso porre la questione di buona posizione solo se sono state scelte in modo mutuamente consistente le classi di funzioni cui si vuole che appartengano, rispettivamente, dati e soluzioni: precisamente, occorre che l'operatore  $L$  operi su campi  $s$  dotati di *regolarità* ( $\equiv$  continuità e differenziabilità) tale che  $L[s]$  risulti un campo di regolarità non minore di quella che compete al tipico dato  $d$ .

## 5 L'oscillatore armonico

Il prototipo di una struttura a deformabilità concentrata è l'*oscillatore armonico* (Fig. ??), che consiste di un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$ , vincolato da una molla elastica di costante  $\kappa > 0$  a muoversi con velocità  $\mathbf{v}$  sulla retta d'azione di una forza applicata  $\mathbf{f}$ . Il moto del sistema è regolato dall'equazione di bilancio della *quantità di moto*  $m\mathbf{v}$  del punto. Viste le forze esterne e interne in gioco, tale bilancio assume l'aspetto:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} - \kappa\mathbf{x},$$

dove, visto che  $\mathbf{f} = f(t)\mathbf{e}$ , si deve porre:

$$\mathbf{x} = x(t)\mathbf{e}, \quad \mathbf{v} = \dot{x}(t),$$

ottenendo:

$$m\ddot{x} + \kappa x = f. \quad (5.2)$$

Questa equazione prescrive che l'operatore differenziale

$$L[x] = m\ddot{x} + \kappa x$$

determini un *moto*  $t \mapsto x(t)$  che abbia regolarità di due ordini maggiore della regolarità della *forzante*  $t \mapsto f(t)$ : ad esempio, di classe  $C^2(0, +\infty)$ , se la forzante assegnata è di classe  $C^0(0, +\infty)$  (si ricordi l'Osservazione 3, fatta alla fine delle considerazioni introduttiva a questo capitolo).

Dimostreremo, costruendole, che vi sono infinite soluzioni dell'equazione (5.2), tra le quali ce n'è una soltanto che soddisfa sia le *condizioni iniziali*:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (5.3)$$

sia una maggiorazione di dipendenza continua del tipo (4.1). Il problema (5.2)-(5.3) è dunque un problema ben posto. La linearità del problema ci consente di procedere a costruirne la soluzione sovrapponendo gli effetti dei dati: ponendo  $f(t) \equiv 0$  in (5.2), determineremo il *moto libero* (cioè, *non forzato*) conseguente all'imposizione delle condizioni iniziali (5.3); a questo moto aggiungeremo, istante per istante, il *moto forzato* ottenuto risolvendo (5.2) con condizioni iniziali nulle:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (5.4)$$

### 5.1 Moto libero

Vogliamo dunque risolvere il seguente *problema ai valori iniziali*:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \kappa x = 0, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Per farlo, adottiamo il *metodo degli esponenti caratteristici*, cercando soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria (5.5)<sub>1</sub> della forma

$$x(t) = e^{\alpha t}, \quad \alpha \neq 0.$$

Procedendo per sostituzione, è facile vedere che tali soluzioni esistono se

$$e^{\alpha t}(m\alpha^2 + \kappa) = 0 \quad \forall t \in (0, \infty),$$

ovvero, se  $\alpha$  soddisfa l'*equazione caratteristica*

$$m\alpha^2 + \kappa = 0, \quad (5.6)$$

che ha le soluzioni

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad i^2 = -1. \quad (5.7)$$

Indicando con

$$p := \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

la *pulsazione propria* del sistema (le cui dimensioni sono tempo<sup>-1</sup>, misurata in sec<sup>-1</sup>), la coppia di funzioni

$$x_1(t) = e^{+ipt}, \quad x_2(t) = e^{-ipt}$$

si dice un *sistema fondamentale di integrali* dell'equazione (5.5)<sub>1</sub>. Questo sistema non è l'unico che l'equazione ammetta: infatti, in virtù delle *formule di Eulero*

$$e^{+ipt} = \cos pt + i \sin pt, \quad e^{-ipt} = \cos pt - i \sin pt, \quad (5.8)$$

non si fatica a riconoscere come sistema fondamentale anche la coppia di funzioni

$$\bar{x}_1(t) = \cos pt, \quad \bar{x}_2(t) = \sin pt.$$

Le  $\infty^2$  soluzioni dell'equazione (5.5)<sub>1</sub> si possono scrivere come combinazioni ad arbitrari coefficienti costanti degli integrali di un suo sistema fondamentale: ad esempio,

$$x(t) = c_1 \cos pt + c_2 \sin pt. \quad (5.9)$$

L'unica soluzione che il rispetto delle condizioni iniziali consente si ottiene scegliendo le costanti nel(l'unico) modo compatibile con esse: perché (5.9) e (5.5)<sub>2</sub> siano compatibili, occorre che

$$x(0) = c_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = pc_2 = \dot{x}_0;$$

quindi la soluzione cercata è:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt. \quad (5.10)$$

**Osservazione.** Il moto libero è *periodico*; il *periodo*  $T = \omega^{-1}$  (misurato in sec) è definito come l'inverso della *frequenza circolare*  $\omega := \frac{p}{2\pi}$ , misurata in hertz. Non è difficile conferire alla funzione (5.10) la forma:

$$x(t) = a \sin(pt + \phi), \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{p^2}}, \quad \phi = \arctan \frac{px_0}{\dot{x}_0}, \quad (5.11)$$

dove  $a$  e  $\phi$  sono l'*ampiezza* e la *fase* del moto (Fig. ??).

**Esercizio.** Si determinino le costanti di integrazione nel caso in cui la soluzione del problema di moto libero sia rappresentata nella forma

$$x(t) = c_1 e^{+ipt} + c_2 e^{-ipt}.$$

## 5.2 Moto impulsivo

Come opportuna premessa alla soluzione del problema di moto forzato di un oscillatore armonico, studiamo il moto di un punto materiale conseguente ad una *percossa*, cioè, all'applicazione di una forza molto intensa per un intervallo di tempo assai breve, tale che ne risulti finito l'*impulso*:

$$0 \leq |\mathbf{i}(t)| < +\infty, \quad \mathbf{i}(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \mathbf{f}(s) ds. \quad (5.12)$$

Newton ci insegna che la quantità di moto di un punto materiale di massa  $m$  e velocità  $\mathbf{v}$  è bilanciata da  $\mathbf{f}$ , la forza totale a quel punto applicata, se risulta:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f}. \quad (5.13)$$

Ne segue che

$$m(\mathbf{v}(t+\tau) - \mathbf{v}(t-\tau)) = \int_{t-\tau}^{t+\tau} \mathbf{f}(s) ds,$$

ovvero, introducendo la notazione

$$[\psi](t) := \psi(t+) - \psi(t-) \quad (5.14)$$

per il *salto* di una grandezza dipendente dal tempo  $\psi$  all'istante  $t$ ,

$$[m\mathbf{v}](t) = \mathbf{i}(t); \quad (5.15)$$

questo risultato va sotto il nome di il *teorema dell'impulso*: per un punto materiale, *il salto della quantità di moto è pari all'impulso* della forza applicata.

**Osservazione.** È importante notare che l'impulso associato a una forza che dipenda dal tempo in modo regolare all'istante di interesse (diciamo, che sia continua in  $t$ ) è nullo. Le *forze impulsive* – quelle, cioè, che possono trasmettere al corpo cui siano applicate un impulso non nullo ad un certo istante – dipendono dal tempo al modo suggerito da Dirac.<sup>1</sup> Una *forza di Dirac* che trasmetta l'impulso  $i$  all'istante  $t$  si può immaginare come una successione di forze  $\{\mathbf{f}_n\}$ , di direzione e verso costante e modulo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n(s) &= \frac{n}{2} i \quad \text{per } s \in \left(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}\right), \\ &= 0 \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

(Fig. ??); è facile verificare che l'impulso di ciascuna forza  $\mathbf{f}_n$  all'istante  $t$  vale appunto  $i$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Paul Adrien Maurice D. (Bristol, Inghilterra, 8.8.1902 – Tallahassee, Florida, 20.10.1984).

<sup>2</sup> Qui e più avanti non si confonda l'impulso con l'unità immaginaria.

Segue da questa osservazione che gli effetti di una forza impulsiva su un punto materiale sono gli stessi tanto se è libero quanto se è vincolato da una molla elastica, come accade per l'oscillatore armonico. Infatti, la porzione della forza totale costituita dalla forza elastica interna  $(-\kappa x(t))\mathbf{e}$  ha, se il moto è continuo, impulso nullo.

Ammettiamo allora, senza alcuna sostanziale perdita di generalità, che moto e impulso siano collineari:

$$\mathbf{x}(t) = x\mathbf{e}, \quad \mathbf{f}(t) = f(t)\mathbf{e} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{i}(t) = i(t)\mathbf{e}.$$

Visto che possiamo scrivere l'equazione di Newton in forma scalare:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = f \quad (5.16)$$

ne deduciamo per integrazione che

$$\dot{x}(t+z) = \dot{x}(t-\tau) + \frac{1}{m} \int_{t-\tau}^{t+z} f(s)ds;$$

da un'ulteriore integrazione ricaviamo poi che

$$x(t+\tau) - x(t-\tau) = (2\tau)\dot{x}(t-\tau) + \frac{1}{m} \int_{-\tau}^{+\tau} dz \left( \int_{t-\tau}^{t+z} f(s)ds \right).$$

Infine, supponendo che la funzione  $s \mapsto f(s)$  obbedisca, oltre alla condizione (5.12) sull'impulso, anche la condizione seguente:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{+\tau} dz \left( \int_{t-\tau}^{t+z} f(s)ds \right) = 0, \quad (5.17)$$

e passando al limite per  $\tau \rightarrow 0$ , otteniamo

$$[x](t) = 0; \quad (5.18)$$

come dire che una percossa del tipo considerato non altera la posizione che il punto materiale occupa all'istante in cui gliela si infligge. D'altra parte, un'applicazione diretta del teorema dell'impulso ci fornisce la variazione di velocità del punto conseguente alla percossa:

$$[\dot{x}](t) = \frac{i}{m}. \quad (5.19)$$

Dunque, l'effetto su un oscillatore armonico (un punto materiale non vincolato) di una percossa di impulso  $i$  inflittagli all'istante  $t_0$  ne sarà il moto libero associato alle condizioni iniziali:

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = \frac{i}{m}; \quad (5.20)$$

l'uso della formula (5.11) consente di scrivere questo moto nella forma:

$$x(t) = \frac{i}{pm} \sin p(t - t_0). \quad (5.21)$$

### 5.3 Moto forzato

Dato il *programma di carico*  $t \mapsto f(t)$ , il problema di *moto forzato* di un oscillatore armonico di massa  $m$  e costante elastica  $\kappa$  consiste nel trovare l'unica funzione  $t \mapsto x(t)$  che soddisfa le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \kappa x = f, \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

La soluzione (5.21) del problema di moto susseguente ad un evento impulsivo a suggerito a Duhamel<sup>3</sup> un argomento euristico (rapido e suggestivo, cioè, ma non rigoroso) per proporre per il problema (5.22) questa forma di soluzione :

$$x(t) = \frac{1}{pm} \int_0^t f(s) \sin p(t-s) ds. \quad (5.23)$$

L'interpretazione dell'*integrale di Duhamel* consiste nel considerare il *moto forzato come sovrapposizione di moti liberi elementari tra loro indipendenti*: il programma di carico viene riguardato come una somma infinita di eventi impulsivi e si immagina che, a seguito dell'applicazione della forza di impulso  $f(s)ds$ , l'oscillatore compia il moto libero

$$\frac{f(s)ds}{pm} \sin p(t-s)$$

prescritto dalla formula (5.21).

Verificare che l'integrale di Duhamel risolve il problema di moto forzato richiede una doppia applicazione del teorema di *differenziazione di un integrale rispetto a un parametro*, del quale basta considerare la seguente semplice versione:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t g(t,s) ds = g(t,t) + \int_0^t \partial_t g(t,s) ds. \quad (5.24)$$

Una prima applicazione fornisce:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{pm} \left( [f(s) \sin p(t-s)]_{s=t} + p \int_0^t f(s) \cos p(t-s) ds \right) \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t f(s) \cos p(t-s) ds; \end{aligned}$$

di qui, con una seconda applicazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{1}{m} \left( [f(s) \cos p(t-s)]_{s=t} - p \int_0^t f(s) \sin p(t-s) ds \right) \\ &= \frac{1}{m} (f(t) - mp^2 x(t)) = \frac{1}{m} (f(t) - \kappa x(t)). \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Jean-Marie D. (St. Malo, Francia, 5.2.1797 – Parigi, 29.4.1872).

**Osservazione.** La formula integrale di Duhamel ci consente di confrontare l'effetto della velocità di carico. Se la forza  $f$  viene applicata all'oscillatore in maniera statica (cioè, facendone crescere il modulo da 0 a  $f$  molto gradualmente), lo spostamento conseguente è pari a  $f/\kappa$ . Invece, se il programma prevede un'applicazione brusca del carico all'istante iniziale:

$$\begin{aligned} f(s) &= 0 & \text{per } s < 0, \\ &= f & \text{per } s \geq 0, \end{aligned}$$

il moto conseguente è:

$$x(t) = \frac{f}{pm} \int_0^t \sin p(t-s) ds = -\frac{f}{mp^2} \int_{pt}^0 \sin \theta d\theta = \frac{f}{k}(1 - \cos pt). \quad (5.25)$$

Ne segue che il *fattore di amplificazione dinamica* (cioè, il  $\max_{t \geq 0}(1 - \cos pt)$ ) della *freccia statica*  $f/k$  è pari a 2, come ben sanno gli alpinisti cui è toccato in sorte di perdere gli appigli (e a più forte ragione, perchè le corde da montagna hanno una risposta deformativa sublineare nell'intorno dell'origine).

### Esercizi.

1. Si risolva il problema di moto di un oscillatore per questa assegnazione della forzante:

$$\begin{aligned} f(s) &= 0 & \text{per } s < 0, \\ &= \frac{s}{s_0} f & \text{per } 0 \leq s < s_0, \\ &= f & \text{per } s \geq s_0, \end{aligned}$$

e si determinino i limiti della soluzione ottenuta tanto per  $s_0 \rightarrow +\infty$  che per  $s_0 \rightarrow 0$ .

2. Si determini il moto conseguente all'applicazione della forzante:

$$\begin{aligned} f(s) &= 0 & \text{per } s < 0, \\ &= \frac{s_0 - s}{s_0} f & \text{per } 0 \leq s < s_0, \\ &= 0 & \text{per } s \geq s_0. \end{aligned}$$

## 5.4 Soluzione del problema generale di moto

Per un oscillatore armonico, il problema generale di moto ha la forma

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \kappa x = f, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \end{cases} \quad (5.26)$$

La soluzione si ottiene sovrapponendo gli effetti dei dati iniziali e di carico rispettivamente resi espliciti dalle relazioni (5.10) e (5.22):

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{pm} \int_0^t f(s) \sin p(t-s) ds. \quad (5.27)$$

### 5.5 Battimenti e risonanza

Per studiare il moto forzato conseguente all'applicazione a partire dalla *quiete* (cioè, da condizioni iniziali di spostamento e velocità nulli) di una forzante cosinusoidale di pulsazione  $\omega$ :

$$f(s) = f \cos \omega s, \quad s \geq 0,$$

basta calcolare il relativo integrale di Duhamel:

$$x(t) = \frac{f}{pm} \int_0^t \cos \omega s \sin p(t-s) ds. \quad (5.28)$$

A questo fine, ricordiamo anzitutto le *formule di addizione*:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

dalle quali si trae:

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta), \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Allora, all'integranda in (5.28) si possono dare le forme equivalenti:

$$\begin{aligned} \cos \omega s \sin p(t-s) &= \cos \omega s (\sin pt \cos ps - \cos pt \sin ps) \\ &= \sin pt \cos \omega s \cos ps - \cos pt \sin ps \cos \omega s \\ &= \frac{1}{2} \sin pt (\cos(\omega+p)s + \cos(\omega-p)s) - \frac{1}{2} \cos pt (\sin(\omega+p)s + \sin(\omega-p)s); \end{aligned}$$

sostituendo in (5.28), si ottiene:

$$\frac{2pm}{f} x(t) = \sin pt \int_0^t (\cos(\omega+p)s + \cos(\omega-p)s) ds - \cos pt \int_0^t (\sin(\omega+p)s + \sin(\omega-p)s) ds;$$

di qui, a conti fatti, intanto:

$$x(t) = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega t) = \frac{f}{\kappa} \frac{1}{1 - \omega^2/p^2} (\cos \omega t - \cos pt).$$

Si controlla subito come questa formula di rappresentazione del moto sia coerente con (5.25), che si ottiene per  $\omega = 0$ . Non si tratta però della rappresentazione più conveniente in generale, che si può ricavare da questa a patto di ricordare un'altra identità trigonometrica, magari meno nota delle formule di prostaferesi:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2};$$

impiegando questa identità, dopo qualche passaggio, otteniamo:

$$x(t) = \frac{f}{\kappa} \frac{2}{1 - \omega^2/p^2} \sin \omega_b t \sin \omega_v t, \quad \omega_b := \frac{p - \omega}{2}, \quad \omega_v := \frac{p + \omega}{2}. \quad (5.29)$$

Possiamo adesso interpretare il moto come una vibrazione sinusoidale di pulsazione  $\omega_v$  e di ampiezza

$$a(t; p, \omega) = \frac{f}{\kappa} \frac{2}{1 - \omega^2/p^2} \sin \omega_b t \quad (5.30)$$

variabile nel tempo con periodo  $\omega_b^{-1}$ ; questa oscillazione di ampiezza viene chiamata *battimento*. I due periodi caratteristici del moto,  $T_v = 2\pi/\omega_v$  e  $T_b = 2\pi/\omega_b$ , si dicono *periodo di vibrazione* e *periodo di battimento*; si osservi che  $T_b > T_v$ , qualunque siano i valori  $p$  e  $\omega > 0$  delle pulsazioni caratteristiche dell'oscillatore e della forzante.

I fenomeni di battimento e risonanza si presentano in generale insieme, come mostra la Fig. ??, dove si è posto  $p = (10/9)\omega$ , ovvero  $T_b = 19T_v$ . Se  $\omega \rightarrow p$ , l'oscillazione di ampiezza evolve in modo alquanto sorprendente:

$$\omega_b \rightarrow 0 \ \& \ \omega_v \rightarrow p, \quad \text{ovvero} \quad T_b \rightarrow +\infty \ \& \ T_v \rightarrow 2\pi/p,$$

e poiché

$$\lim_{\omega \rightarrow p} \frac{2}{1 - \omega^2/p^2} \sin \omega_b t \sin \omega_v t = pt \left( \lim_{\omega_b \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t} \right) \left( \lim_{\omega_v \rightarrow p} \frac{p}{2\omega_v} \sin \omega_v t \right),$$

il moto forzato in esame diviene un puro *moto di risonanza*:

$$x(t) = \frac{f}{2\kappa} pt \sin pt \quad (5.31)$$

(Fig. ??), una vibrazione di periodo  $T_v = 2\pi/p$ , la cui ampiezza cresce linearmente nel tempo.

**Esercizio.** Si calcoli l'integrale di Duhamel per un oscillatore soggetto ad una forzante sinusoidale

$$f(s) = f \sin \omega s, \quad s \geq 0.$$

Il moto presenta battimenti? Qual'è l'eventuale condizione di risonanza?

**Osservazione.** Di una forzante generica, purchè periodica, si può eseguire l'*analisi di Fourier*, che ne fornisce una rappresentazione in serie di seni e coseni, del tipo:

$$f(s) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \sin \omega_n s + g_n \cos \omega_n s), \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}$$

(qui  $T$  è il periodo di  $f$ ). Avendo in mente la rappresentazione del moto secondo Duhamel, si comprende come l'uno o l'altro dei termini della serie di

Fourier associata alla forzante, non importa quanto piccola sia l'ampiezza relativa, può risultare responsabile di uno specifico fenomeno di risonanza: basta che, per un qualche valore di  $n$ ,  $\omega_n$  sia molto prossimo a  $p$ . Di qui l'importanza dell'analisi di Fourier del segnale forzante per valutare la sicurezza di una struttura soggetta a carichi periodici, eolici, ad esempio, o sismici.

## 6 L'oscillatore come sistema dinamico autonomo

Riprendiamo in esame il problema di moto libero (5.5). Se poniamo

$$\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2), \quad y_1(t) := x(t), \quad y_2(t) = \dot{x}(t), \quad (6.32)$$

possiamo scrivere quel problema ai valori iniziali nella forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{\kappa}{m} y_1, \\ y_1(0) = x_0, \quad y_2(0) = \dot{x}_0, \end{cases} \quad (6.33)$$

ovvero, ponendo anche

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 \equiv (x_0, \dot{x}_0), \quad (6.34)$$

nella forma compatta di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, vettoriale:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (6.35)$$

Un primo vantaggio di questo formato – che è caratteristico dei *sistemi dinamici autonomi*, cioè, non forzati – è di valere quali che siano (l'ordine dell'equazione differenziale del problema e) il numero di *gradi di libertà* del sistema ovvero, il che è lo stesso, il numero di righe  $n$  della matrice  $\mathbf{A}$ . Qualunque sia  $n$ , è facile ottenere la soluzione di (6.35) con il metodo degli esponenti caratteristici. Si pone tentativamente

$$\mathbf{y}(t; \alpha, \mathbf{z}) = e^{\alpha t} \mathbf{z}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ e con } \mathbf{z} \text{ un } a\text{-vettore,}$$

si sostituisce nell'equazione (6.35)<sub>1</sub> e si trova che soluzioni della forma proposta sono possibili purché le coppie  $(\alpha, \mathbf{z})$  risolvano il *problema algebrico agli autovalori* retto dalla matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \alpha\mathbf{z}. \quad (6.36)$$

Nel caso dell'oscillatore armonico, soddisfare questa condizione equivale prima a risolvere l'equazione caratteristica (5.6) poi, per ciascuna soluzione  $\alpha_\beta$ , ( $\beta = 1, 2$ ) di questa ( $\equiv$  per ciascun autovalore), determinare il corrispondente autovettore  $\mathbf{z}_\beta$  come soluzione dell'equazione vettoriale:

$$(\mathbf{A} - \alpha_\beta \mathbf{1}) \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}. \quad (6.37)$$

Si trova:

$$\mathbf{z}_\beta \equiv c_\beta \bar{\mathbf{z}}_\beta, \quad \bar{\mathbf{z}}_\beta \equiv (1, \alpha_\beta),$$

i coefficienti  $c_\beta$  restando per il momento arbitrari. Ne consegue che la soluzione generale dell'equazione (6.35)<sub>1</sub> si può scrivere come

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\beta=1}^2 c_\beta e^{\alpha_\beta t} \bar{\mathbf{z}}_\beta, \quad (6.38)$$

dove i coefficienti  $c_\beta$  restano determinati dalla condizione iniziale (6.35)<sub>2</sub>:

$$\sum_{\beta=1}^2 c_\beta \bar{\mathbf{z}}_\beta = \mathbf{y}_0. \quad (6.39)$$

**Osservazione.** Nel caso generale, quando si ha a che fare con una struttura a deformabilità concentrata le cui configurazioni sono descritte da  $n$  parametri  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), e quindi il vettore rappresentativo del sistema dinamico corrispondente è:

$$\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \dots, y_{2n}), \quad y_i(t) := x_i(t), \quad y_{n+i}(t) = \dot{x}_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6.40)$$

la procedura da seguire è la stessa. Formalmente, il problema agli autovalori si scrive ancora al modo (6.36), dove adesso  $\mathbf{A}$  è un'opportuna matrice  $2n \times 2n$ .

## 7 L'energia di un oscillatore

Torniamo adesso al problema di moto generale di moto (5.26). Moltiplicando l'equazione differenziale per  $\dot{x}$  e integrando sull'intervallo di tempo  $(0, t)$ , otteniamo:

$$\left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} \kappa x^2(t) \right) - \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} \kappa x_0^2 \right) = \int_0^t f(s) \dot{x}(s) ds. \quad (7.41)$$

Al membro destro di questa relazione troviamo la differenza tra l'*energia totale* dell'oscillatore valutata all'istante  $t$  e quella valutata all'istante iniziale; al

<sup>4</sup> Questo sistema ha la forma esplicita:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0, \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = \dot{x}_0; \end{cases}$$

ricordando che  $\alpha_{1,2} = \pm ip$ , la soluzione ne è:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{\dot{x}_0}{p} \right), \quad c_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{\dot{x}_0}{p} \right).$$

membro sinistro il *lavoro* speso dalla forza applicata sull'oscillatore durante l'intervallo di tempo considerato. Si può dunque rendere sbrigativamente il significato di quella relazione dicendo che *il lavoro della forza applicata è pari al salto dell'energia totale* dell'oscillatore. Quest'ultima consiste dell'*energia cinetica*  $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$  e dell'*energia elastica*  $\frac{1}{2} \kappa x^2$ ; la *potenza* istantanea della forza applicata è per definizione  $f(t)\dot{x}(t)$ .

Una forza si dice *conservativa* se dipende dalla posizione in quanto gradiente di un *potenziale*  $\widehat{F}$  che ne dipende:

$$\hat{f}(x) = -\partial_x \widehat{F}(x).$$

Se la forza applicata all'oscillatore è conservativa, allora essa dipende dal tempo solo perché la posizione ne dipende:

$$f(t) = \hat{f}(x(t)) = -\partial_x \widehat{F}(x(t));$$

quindi,

$$f(t)\dot{x}(t) = -\partial_x \widehat{F}(x) \dot{x}(t) = -\dot{F}(t) \quad (7.42)$$

e, di conseguenza,

$$\int_0^t f(s)\dot{x}(s) ds = -(F(t) - F(0)), \quad F(0) = \widehat{F}(x_0).$$

Ne segue che la relazione (7.41) implica la *conservazione dell'energia totale del sistema oscillatore-forzante*:

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} \kappa x^2(t) + F(t) = \text{cost.} = \frac{1}{2} m\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} \kappa x_0^2(t) + \widehat{F}(x_0). \quad (7.43)$$

Un analogo risultato vale anche, naturalmente, se la forzante è identicamente nulla:

$$m\dot{x}^2(t) + \kappa x^2(t) = m\dot{x}_0^2 + \kappa x_0^2. \quad (7.44)$$

Riscriviamo quest'equazione nella forma:

$$\frac{x^2}{s_1^2} + \frac{\dot{x}^2}{s_2^2} = 1,$$

dove

$$s_1^2 = m^{-1}(m\dot{x}_0^2 + \kappa x_0^2), \quad s_2^2 = \kappa^{-1}(m\dot{x}_0^2 + \kappa x_0^2).$$

Nello *spazio delle fasi*, cioè, nel piano cartesiano il cui punto tipico ha le coordinate  $(y_1, y_2)$  introdotte in (6.32), il moto libero di un oscillatore armonico è un moto periodico che si svolge su un'ellisse

$$\frac{y_1^2}{s_1^2} + \frac{y_2^2}{s_2^2} = 1, \quad (7.45)$$

di semiassi  $s_1, s_2$ , la sua *orbita* (Fig. ??). Vari altri tipi di orbita, non necessariamente periodiche o limitate, sono possibili quando, come vedremo, si considerano oscillatori più complessi di quello armonico elementare considerato finora.

**Esercizio.** Provare che l'orbita, come indicato nella figura, viene percorsa in senso orario.

**Osservazione 1.** L'*attrazione gravitazionale* è un esempio frequente di forza posizionale. Nell'approssimazione abituale in meccanica terrestre, tale attrazione è messa in conto con una forza costante:

$$\mathbf{g}(x) = -\nabla G(x) = -mg\mathbf{z}, \quad G(x) = mgz, \quad x - o = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha + z\mathbf{z}$$

(Fig. ??).

**Osservazione 2.** Dalle relazioni (7.42) segue una importante proprietà di consistenza tra una forza conservativa e il relativo potenziale: istante per istante, la potenza spesa dalla forza bilancia la variazione del potenziale nell'unità di tempo, ovvero:

$$(\text{forza} \times \text{velocità}) + \frac{d}{dt}(\text{potenziale}) = 0. \quad (7.46)$$

È interessante notare che l'identica relazione strutturale è soddisfatta da forza d'inerzia ed energia cinetica di un punto materiale:

$$(-m\ddot{x})\dot{x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = 0.$$

Nell'ambito della meccanica classica, questa circostanza legittima l'opinione che la forza d'inerzia sia riguardabile come una particolare forza esterna di natura conservativa, quella esercitata sui corpi massicci oggetto delle nostre osservazioni dalle *stelle fisse*, cioè, da una distribuzione di masse infinitamente grandi rispetto a quelle degli oggetti che osserviamo, infinitamente distanti da essi.

Non si vede perchè non si possano utilmente considerare anche *coppie conservative*, per le quali la relazione (9.52) prenda l'aspetto:

$$(\text{coppia} \times \text{velocità angolare}) + \frac{d}{dt}(\text{potenziale}) = 0. \quad (7.47)$$

Sembra quindi opportuno assumere il seguente principio generale di consistenza tra una data azione esterna conservativa  $a$  e il relativo potenziale  $A$ :

$$(\text{potenza dell'azione esterna } a) + \frac{d}{dt}(\text{potenziale } A) = 0;$$

in particolare,

$$(\text{potenza delle azioni inerziali}) + \frac{d}{dt}(\text{energia cinetica}) = 0 \quad (7.48)$$

(un siffatto principio servirebbe da guida per l'eventuale introduzione di una nozione di *coppia d'inerzia*, distinta da quella di momento della forza d'inerzia).

**Esercizio.** Si scriva la relazione di consistenza (7.48) nel caso di un corpo rigido in moto attorno ad un asse fisso, leggendo la potenza delle azioni inerziali come (momento delle forze d'inerzia) $\times$ (velocità angolare).

## 8 Problemi di moto riconducibili a quello di un oscillatore armonico

### 8.1 Tubo in pressione

### 8.2 Massa oscillante su un filo teso

### 8.3 Volano calettato su una barra di torsione

### 8.4 Portale soggetto ad azioni sismiche o del vento

## 9 Catene di oscillatori

### 9.1 Due masse oscillanti

Come primo esempio di struttura a più gradi di libertà, consideriamo il sistema di Fig. ??, costituito da due punti materiali di identica massa  $m$ , collegati da due molle di identica rigidità  $\kappa$ .

Scegliamo come parametri di configurazione le posizioni  $x_1(t), x_2(t)$  dei punti materiali al generico istante  $t$ , convenendo che la prima molla da sinistra sia scarica se  $x_1 = 0$ , la seconda se  $x_2 - x_1 = 0$ . Il sistema delle equazioni di bilancio della quantità di moto di ciascuno dei due punti materiali è il sistema di equazioni differenziali ordinarie da risolvere per determinare il moto  $t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$  conseguente all'imposizione delle condizioni iniziali

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}. \quad (9.49)$$

Per il primo punto materiale, abbiamo:

$$0 = (-m\ddot{x}_1) + (-\kappa x_1) + \kappa(x_2 - x_1),$$

dove  $-m\ddot{x}_1$  è la forza d'inerzia e  $-\kappa x_1, \kappa(x_2 - x_1)$  sono le forze esercitate dalle due molle; per il secondo punto materiale, abbiamo:

$$0 = -m\ddot{x}_2 - \kappa(x_2 - x_1).$$

Il sistema delle equazioni di moto ha quindi l'aspetto:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2\kappa x_1 - \kappa x_2 = 0, \\ m\ddot{x}_2 - \kappa x_1 + \kappa x_2 = 0, \end{cases} \quad (9.50)$$

ovvero, in forma matriciale:

$$[M] [\ddot{x}] + [K] [x] = [0], \quad (9.51)$$

dove

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix}, \quad [\ddot{x}] = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (9.52)$$

Si noti l'analogia di struttura che accomuna (9.51) e la prima delle equazioni (5.5), che qui ripetiamo:

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0;$$

oltre a questa proprietà qualitativa, vale anche un'analogia quantitativa: alla positività dei coefficienti di massa  $m$  e risposta elastica  $\kappa$  corrisponde la simmetria e positività della *matrice delle masse*  $M$  e della *matrice delle rigidità*  $K$ .

**Esercizi.**

1. Verificare che, se alle masse oscillanti sono applicate le forze esterne  $\mathbf{f}_1 = f_1 \mathbf{e}$  e, rispettivamente,  $\mathbf{f}_2 = -f_2 \mathbf{e}$ , allora le equazioni di moto (9.51) divengono:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2\kappa x_1 - \kappa x_2 = f_1, \\ m\ddot{x}_2 - \kappa x_1 + \kappa x_2 = -f_2. \end{cases} \quad (9.53)$$

2. Verificare che la matrice delle rigidezze di una *catena chiusa* di due masse oscillanti (Fig. ??) è:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & 2\kappa \end{bmatrix}$$

(si confronti con (9.52)<sub>2</sub>, che vale nel caso di catena aperta).

**9.2  $n$  masse oscillanti**

È facile vedere come si modifichi il sistema (9.50) per una catena di  $n \geq 3$  punti materiali di massa identica, collegati da molle identiche: l'equazione per il primo punto materiale resta la prima delle (9.50); quella per l'ultimo la seconda, modificata così se la catena è aperta:

$$m\ddot{x}_n - \kappa x_{n-1} + \kappa x_n = 0,$$

così, invece, se la catena è chiusa:

$$m\ddot{x}_n - \kappa x_{n-1} + 2\kappa x_n = 0;$$

l'equazione di bilancio della quantità di moto per il punto materiale  $i$ -esimo ( $i \neq 1, n$ ) è:

$$0 = (-m\ddot{x}_i) + (-\kappa(x_i - x_{i-1})) + \kappa(x_{i+1} - x_i),$$

ovvero

$$m\ddot{x}_i - \kappa x_{i-1} + 2\kappa x_i - \kappa x_{i+1} = 0. \quad (9.54)$$

Perciò, l'equazione matriciale (9.51) conserva il suo aspetto formale, ma la matrice delle masse diviene un multiplo positivo della matrice identità di ordine  $n$ :

$$M = mI^{(n)} \quad (9.55)$$

e la matrice delle rigidezze diviene la seguente *matrice tridiagonale* simmetrica:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2\kappa & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 2\kappa & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad (9.56)$$

con  $K_{nn} = \kappa$  ( $2\kappa$ ) se la catena è aperta (chiusa).

Se ogni punto materiale della catena ha massa diversa, la matrice delle masse perde parzialmente l'aspetto semplice (9.55), diventando una *matrice diagonale*

$$[M] = \text{diag} \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$$

con elementi tutti positivi, ancorché differenti, quindi restando invertibile. Se, inoltre, ogni molla ha risposta elastica differente, l'equazione di bilancio (9.54) diviene

$$m\ddot{x}_i - \kappa_{i-1}x_{i-1} + (\kappa_i + \kappa_{i+1})x_i - \kappa_{i+1}x_{i+1} = 0;^5 \quad (9.57)$$

di conseguenza, la matrice delle rigidezze, che resta tridiagonale e simmetrica, prende l'aspetto;

$$[K] = \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 & \kappa_3 + \kappa_4 & -\kappa_4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_{n-3} & \kappa_{n-2} + \kappa_{n-1} & -\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & \kappa_{n-1} + \kappa_n & -\kappa_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_n & K_{nn} \end{bmatrix},$$

con  $K_{nn} = \kappa_n$  ( $\kappa_n + \kappa_{n+1}$ ) se la catena è aperta (chiusa).

L'equazione matriciale che regola i moti non forzati della catena si può scrivere sia nella forma (9.51) che nella forma seguente;

$$[\ddot{x}] + [M^{-1}K][x] = [0]. \quad (9.58)$$

Non c'è dubbio che le proprietà qualitative e quantitative delle soluzioni di (9.58) dipendano esclusivamente dalla matrice tridiagonale  $M^{-1}K$  che appare in quell'equazione differenziale vettoriale: due catene che condividano tale matrice si comportano nello stesso modo.

Le soluzioni di (9.58) del tipo

$$[x(t)] = \exp(\lambda t) [z] \quad (9.59)$$

sono i cosiddetti *moti caratteristici* della catena in esame. Per determinare questi moti, occorre risolvere un problema algebrico agli autovalori: trovare le coppie  $(\lambda, z)$  tali che

$$[M^{-1}K][z] = (-\lambda^2)[z], \quad (9.60)$$

ovvero, tali che

$$[M^{-1}K + \lambda^2 I^{(n)}][z] = [0], \quad (9.61)$$

**Esercizio.** Si determinino i moti caratteristici della catena chiusa di tre oscillatori identici mostrata in Fig. ??.

<sup>5</sup> Questa equazione vale per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  pur di convenire che  $x_0 = 0$  e che, inoltre,  $\kappa_{n+1}$  se la catena è aperta, ovvero  $x_{n+1} = 0$  se la catena è chiusa.

**Sol.** Le matrici di massa e rigidezza sono:

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \kappa \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde

$$[M^{-1}K] = p^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad p^2 = \frac{\kappa}{m}.$$

Posto  $\alpha = -p^{-2}\lambda^2$ , i problemi (9.60) e (9.61) prendono, rispettivamente, l'aspetto particolare

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori, cioè, le radici dell'equazione polinomiale

$$\begin{vmatrix} 2-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

sono:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2};$$

ciascuno degli autovettori corrispondenti deve soddisfare le condizioni:

$$(2-\alpha)z_1 = z_2 = (2-\alpha)z_3, \quad z_1 - (2-\alpha)z_2 + z_3 = 0.$$

Quindi, un primo tipo di moto caratteristico ha l'aspetto (9.59), con

$$\lambda_1^2 = -p^2, \quad [z^{(1)}] \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

si tratta di moti oscillatori in opposte direzioni, in fase e di pari ampiezza ad ogni istante, dei due punti materiali estremi, quello centrale restando fermo. Quanto agli altri due moti caratteristici, si trova che

$$\lambda_2^2 = -(2+\sqrt{2})p^2, \quad [z^{(2)}] \propto \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_3^2 = -(2-\sqrt{2})p^2, \quad [z^{(3)}] \propto \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che gli autovettori sono mutuamente ortogonali, come dev'essere, visto che gli autovalori sono distinti.

**Esercizio.** Per la catena chiusa di oscillatori considerata nell'esercizio precedente, si determini il moto libero conseguente all'imposizione delle condizioni iniziali:

$$[x(0)] = [x_0], \quad [\dot{x}(0)] = [\dot{x}_0]. \quad (9.62)$$

**Sol.** Data la lista dei moti caratteristici, il tipico moto libero di questa catena di oscillatori ha l'aspetto seguente:

$$[x(t)] = \sum_{j=1}^3 (a_j \exp(i\lambda_j t) + b_j \exp(-i\lambda_j t)) [z^{(j)}]. \quad (9.63)$$

Per risolvere l'esercizio, basta determinare la rappresentazione dei vettori che assegnano posizione e velocità iniziali degli oscillatori della catena nella base ortonormale degli *autoversori*  $\tilde{z}^{(j)} = |\tilde{z}^{(j)}|^{-1} \tilde{z}^{(j)}$  ( $j$  non sommato):

$$[x_0] = \sum_{j=1}^3 x_{0j} [\tilde{z}^{(j)}], \quad [\dot{x}_0] = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_{0j} [\tilde{z}^{(j)}],$$

quindi imporre il rispetto delle condizioni (9.62).

### 9.3 Catene di oscillatori come sistemi dinamici

Poniamo:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.64)$$

dove intendiamo  $\mathbf{y}$  come un  $2n$ -vettore, che abbiamo scritto come *2-vettore a blocchi*, con blocchi

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad (9.65)$$

e dove intendiamo  $\mathbf{A}$  come una matrice  $2n \times 2n$ , scritta come *matrice a blocchi*  $2 \times 2$ , con blocchi  $n \times n$ . Con queste posizioni, possiamo conferire anche alle equazioni di moto di una generica catena di  $n$  oscillatori il formato (6.35), tipico di ogni sistema dinamico autonomo a  $n$  parametri. È importante osservare la completa analogia formale tra le relazioni (9.64) e le corrispondenti relazioni (6.32), (6.34) per il caso  $n = 1$ , caso che d'altra parte si può intendere come una speciale istanza del caso generale qui considerato.

### 9.4 L'energia di una catena di oscillatori

Ci si può chiedere, attendendosi una risposta affermativa, se valga un risultato di conservazione dell'energia totale analogo a (7.44).

Per una catena di due sole masse e molle identiche, aperta o chiusa che sia, l'energia totale consiste dell'energia cinetica  $\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$  e dell'energia elastica  $\frac{1}{2}(\kappa x_1^2 + \kappa(x_2 - x_1)^2 + (K_{22} - \kappa)x_2^2)$ ; dovremmo quindi poter dimostrare che:

$$\begin{aligned} m(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)) + \kappa(x_1^2(t) + (x_2(t) - x_1(t))^2) + (K_{22} - \kappa)x_2^2(t) \\ = m(\dot{x}_{10}^2 + \dot{x}_{20}^2) + \kappa(x_{10}^2 + (x_{20} - x_{10})^2) + (K_{22} - \kappa)x_{20}^2. \end{aligned}$$

Procediamo formalmente, moltiplicando a sinistra (9.51) per  $[\dot{x}]$ :

$$\begin{aligned} 0 &= [\dot{x}]^T [M] [\ddot{x}] + [\dot{x}]^T [K] [x] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ([\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] + [x]^T [K] [x]), \end{aligned}$$

per poi integrare tra 0 e  $t$ , tenendo conto delle condizioni iniziali (9.49). Nel caso di due masse e molle identiche, troviamo:

$$\begin{aligned} [\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] &= m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \\ [x]^T [K] [x] &= x_1 \kappa (2x_1 - x_2) + x_2 (-\kappa x_1 + K_{22} x_2) \\ &= \kappa x_1^2 + \kappa (x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) + (K_{22} - \kappa) x_2^2, \end{aligned}$$

quel che dovevamo dimostrare; per una catena generica, troviamo

$$\begin{aligned} [\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2, \\ [x]^T [K] [x] &= \kappa_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^n \kappa_i (x_i - x_{i-1})^2 + (K_{nn} - \kappa_n) x_n^2. \end{aligned}$$

Continuando, ci si può anche attendere che, proprio come un singolo oscillatore armonico, anche una catena di  $n$  oscillatori abbia un'orbita di tipo ellittico, percorsa indefinitamente a partire dal punto dello spazio delle fasi individuato dalle condizioni iniziali; soltanto che, a rendere complicata la visualizzazione, interviene il fatto che adesso lo spazio delle fasi è  $2n$ -dimensionale, di coordinate  $(x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ .

## 10 L'oscillatore smorzato

È abituale assumere che le forze esterne che dipendano, al più, da *tempo*, *posizione* e *velocità*. Dipendono solo dal tempo le forze “di controllo”, così dette perché se ne dispone a piacere il valore nel corso di un esperimento volto ad osservarne gli effetti. Gli esempi di forze esterne esclusivamente posizionali non mancano: hanno questa natura tutte le forze conservative. In questa sezione, prendiamo per la prima volta in esame forze esterne che dipendono dalla velocità, considerandone l'effetto su un oscillatore armonico.

**Osservazione.** Gli apparati impiegati per compiere esperimenti meccanici si possono dividere in due classi: “soft devices” e “hard devices”.

Un apparato della prima classe consente di osservare e misurare gli effetti di una forza su un corpo; il *programma di carico* è la funzione del tempo

che precisa la forza che si intende applicare nel corso di un certo esperimento; fissato un istante, la misura dell'effetto osservato è il valore della *variabile dipendente* che la funzione *causa*  $\rightarrow$  *effetto* caratteristica del complesso apparato-esperimento-corpo fornisce quando la *variabile indipendente*, la forza di controllo, prende il valore che il programma di carico le assegna a quell'istante. Un apparato della seconda classe viene impiegato per valutare gli effetti di costrizioni geometriche controllate (ad esempio, gli sforzi interni conseguenti all'imposizione di spostamenti, magari variabili nel tempo, a porzioni della frontiera del corpo in esame).

Un oscillatore armonico si può riguardare come un "soft device" quando, fissate una volta per tutte le condizioni iniziali, se ne studiano i moti conseguenti all'applicazione di una collezione arbitraria di forzanti; come un "hard device", quando fissata una forzante (nulla, magari, come la linearità del problema consente senza alcuna perdita di generalità), se ne studiano i moti a partire da condizioni iniziali scelte in modo arbitrario. In entrambi i casi, lo studio consiste nel determinare spostamenti e deformazioni: in un "hard device", lo sforzo nella molla è calcolato presumendola elastica e a risposta lineare. Infatti, in questo come in ogni esperimento in cui tutte le variabili, sia di controllo che osservate, sono meccaniche, solo le deformazioni sono misurate direttamente: gli sforzi vengono dedotti da queste, attribuendo uno specifico comportamento costitutivo al materiale di cui il corpo è composto.

### 10.1 Smorzamento viscoso

In serie con un oscillatore armonico, si ponga un *ammortizzatore oleodinamico* ("dashpot"), ovvero, come indica schematicamente la Fig. ??, un cilindro all'interno del quale sono contenuti un fluido viscoso e un pistone, che può compiere moti relativi al cilindro pur di vincere la resistenza a trafilare del fluido.

Se alla massa oscillante è applicata una forza di controllo  $\mathbf{f}^c = f(t)\mathbf{e}$ , la massa si pone in moto; la molla le trasferisce la forza elastica  $\mathbf{f}^e = -\kappa x(t)\mathbf{e}$  (una forza posizionale), la forza d'inerzia vale  $\mathbf{f}^{in} = -m\mathbf{a} = -m\ddot{x}(t)\mathbf{e}$ ;  $\mathbf{f}^{vs}$ , la forza che rappresenta la *resistenza viscosa* al moto, viene modellata assumendone una semplice dipendenza lineare dalla velocità:

$$\mathbf{f}^{vs}(\mathbf{v}) = -\beta\mathbf{v} = -\beta\dot{x}(t)\mathbf{e}, \quad \beta > 0. \quad (10.66)$$

Il bilancio delle forze in gioco fornisce l'equazione differenziale del moto:

$$\mathbf{f}^c + \mathbf{f}^e + \mathbf{f}^{in} + \mathbf{f}^{vs} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \kappa x = f, \quad (10.67)$$

cui si associano condizioni iniziali del tipo usuale.

Il problema di moto libero si può affrontare e risolvere, come nel caso non smorzato, con il metodo degli esponenti caratteristici introdotto nella Sottosezione 5.1. Cercando soluzioni di

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \kappa x = 0 \quad (10.68)$$

della forma  $x(t) = e^{\alpha t}$ , si trova che il parametro  $\alpha$  dev'essere una radice dell'equazione

$$\alpha^2 + q^2\alpha + p^2 = 0, \quad q^2 = \beta/m, \quad p^2 = \kappa/m. \quad (10.69)$$

Quest'equazione ha due permanenze di segno, quindi due radici con parte reale negativa:

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(q^2 \pm \sqrt{q^2 - 4p^2}\right); \quad (10.70)$$

le possibilità sono tre, a seconda che  $\Delta = q^2 - 4p^2$  sia positivo, nullo o negativo:

$\Delta > 0 \Rightarrow$  due radici negative distinte,  $x(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}$ ;

$\Delta = 0 \Rightarrow$  due radici negative coincidenti,  $x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\alpha t}$ ;

$\Delta < 0 \Rightarrow$  due radici complesse coniugate con parte reale negativa,

$$x(t) = (a_1 \cos \bar{p}t + a_2 \sin \bar{p}t)e^{\alpha t}, \quad \bar{p} = p\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \gamma^2 = \frac{q^2}{4p^2}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}q^2.$$

In tutti e tre i casi il moto è smorzato; nel terzo caso, è oscillatorio, con *fattore di smorzamento*  $\gamma$ .

## 10.2 Smorzamento per attrito

Si consideri un blocco ruvido spinto da una forza di modulo  $a$  contro una via di corsa anch'essa non liscia, come suggerisce la Fig. ???. Se al blocco si applica anche una forza  $\mathbf{b} = b\mathbf{e}$  parallela alla via di corsa, l'effetto dell'*attrito* tra le due superfici si modella immaginando che,

(i) se  $|b| < a \tan \varphi_0$ , il blocco resti in quiete (l'angolo  $\varphi_0$ , che misura la semiapertura del *cono d'attrito* rappresentato in Fig. ??, caratterizza il grado di ruvidezza locale delle due superfici affacciate);

(ii) se  $|b| = a \tan \varphi_0$ , il blocco, in moto con velocità  $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}$ , sperimenti una *resistenza d'attrito*

$$\mathbf{f}^a(\mathbf{v}) = -\delta \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\delta \mathbf{e}, \quad \delta = a \tan \varphi_0 > 0.$$

È importante osservare che tanto la resistenza viscosa quanto quella d'attrito implicano *dissipazione di energia* durante il moto: infatti,

$$\mathbf{f}^{vs} \cdot \mathbf{v} = -\beta |\mathbf{v}|^2 < 0, \quad \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v} = -\delta |\mathbf{v}| < 0. \quad (10.71)$$

Si può dare una rappresentazione unificata di questi due tipi di forze dissipative dipendenti dalla velocità, introducendo la funzione

$$\rho(\mu) = \delta \mu + \frac{1}{2} \beta \mu^2$$

e ponendo:

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}^d(\mathbf{v})| &\leq \rho'(0) && \text{se } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}^d(\mathbf{v}) &= -\rho'(|\mathbf{v}|)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} && \text{altrimenti;} \end{aligned} \quad (10.72)$$

Per un oscillatore armonico cui si ponga in serie uno smorzatore di questo genere, il bilancio delle forze è:

$$\mathbf{f}^c + \mathbf{f}^e + \mathbf{f}^{in} + \mathbf{f}^d = \mathbf{0},$$

dove per  $\mathbf{f}^d$ , combinando (10.71) e (10.72), si deve intendere:

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}^d| &\leq \delta && \text{ad ogni istante } t \text{ in cui } \dot{x}(t) = 0, \\ \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{e} &= -(\beta\dot{x} + \delta) && \text{ad ogni altro istante;} \end{aligned} \quad (10.73)$$

quindi, l'equazione di moto corrispondente è:

$$m\ddot{x} - \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{e} + \kappa x = f. \quad (10.74)$$

Riprendendo la relazione (7.41) della Sezione 7, che esprime il bilancio energetico istantaneo nel corso del moto, si vede che, in presenza di smorzamento, a determinare la variazione dell'energia totale tra due istanti successivi concorre solo quella porzione del lavoro della forza di controllo che non viene dissipata:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} \kappa x^2(t)\right) - \left(\frac{1}{2} m\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} \kappa x_0^2\right) \\ &= \int_0^t f(s)\dot{x}(s)ds - \int_0^t (\beta\dot{x}^2(s) + \delta|\dot{x}(s)|)ds. \end{aligned} \quad (10.75)$$

### 10.3 Plasticità

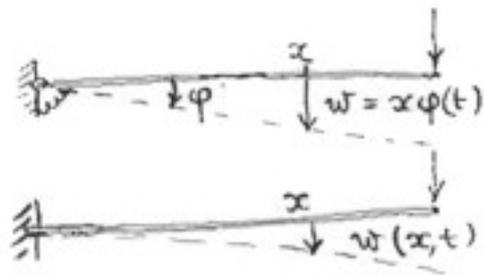


Fig. 3.1

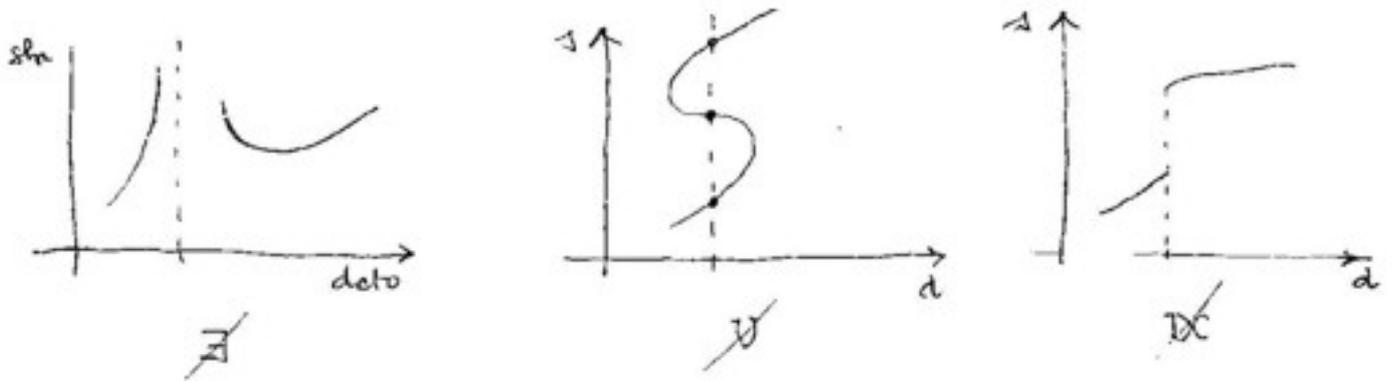


Fig. 3.2

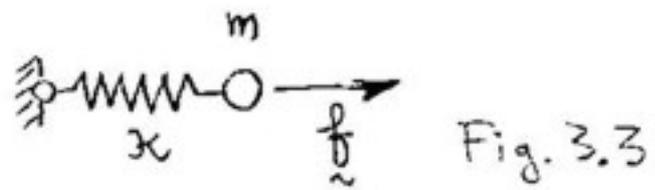


Fig. 3.3

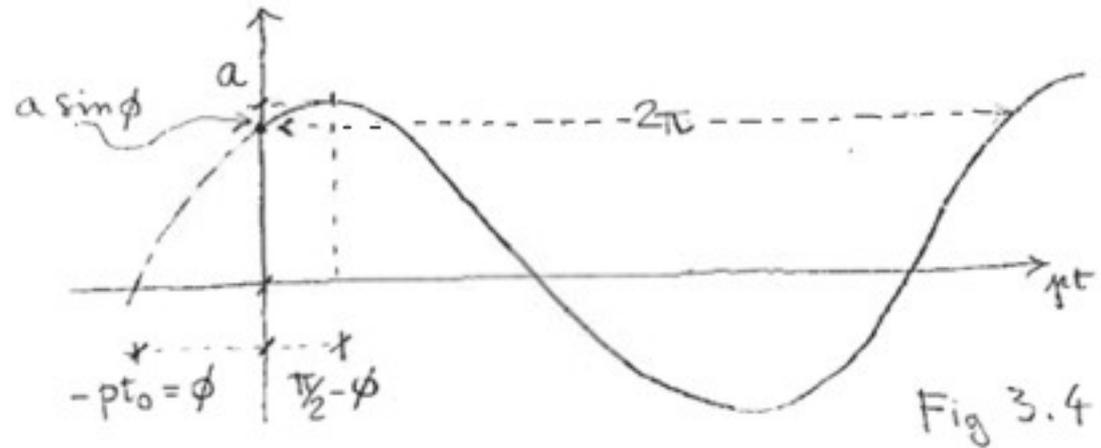


Fig 3.4

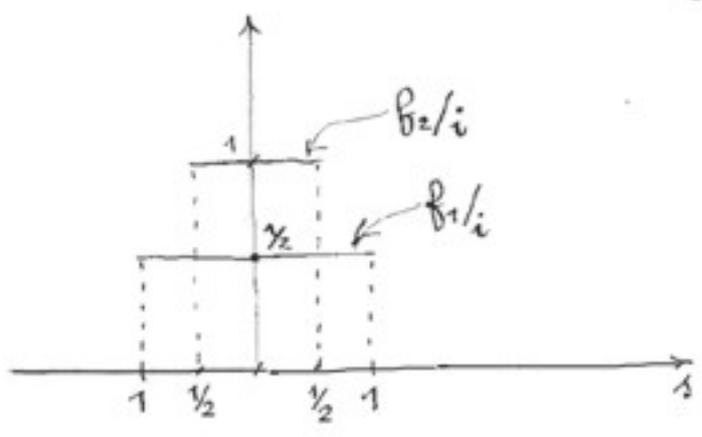


Fig. 3.5

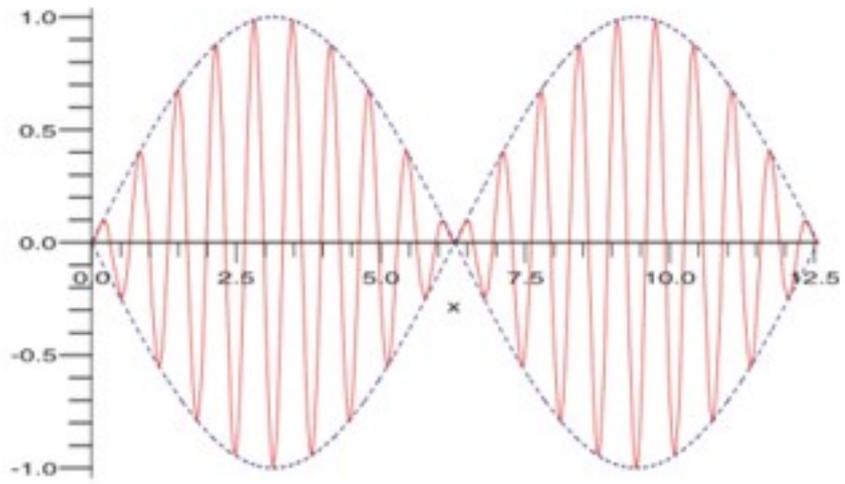


fig. 3.6

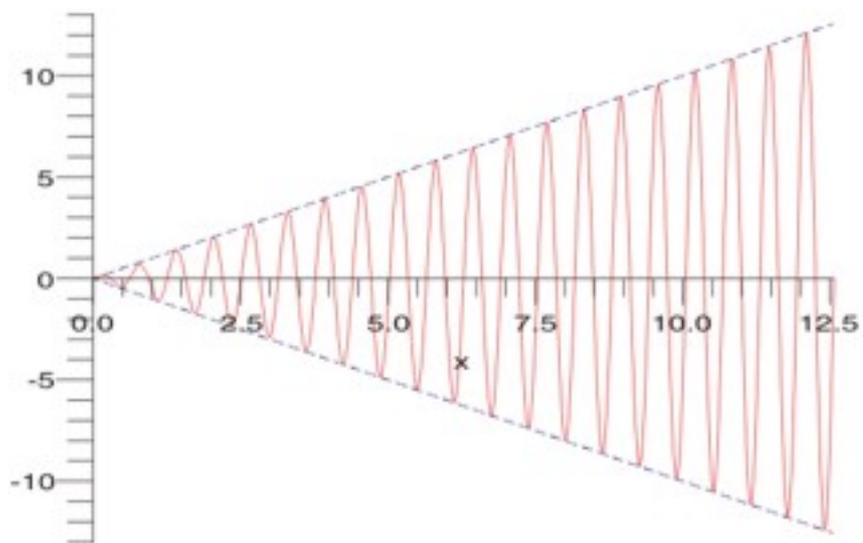
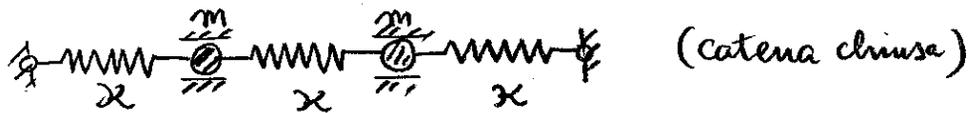
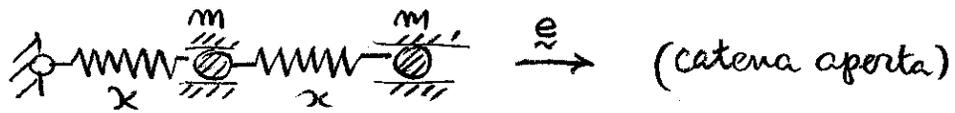
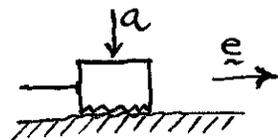
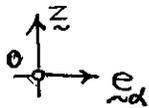
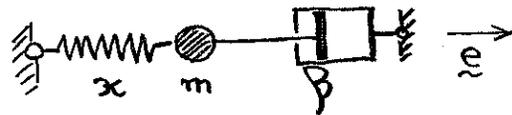


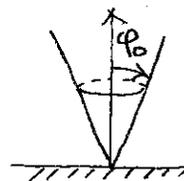
fig. 3.7



(smorzatore oleodinamico)



(blocco scivolo)



(cono d'attrito)