

Geometria dei sistemi piani di masse

La descrizione dello stato di sforzo nei punti della sezione trasversale di una trave coinvolge varie caratteristiche geometriche della sezione stessa. In questo capitolo raccogliamo il materiale preparatorio indispensabile per compiere quella descrizione.

4.1 Trasformazioni di coordinate cartesiane ortogonali

Vista l'applicazione che abbiamo in mente, restringeremo l'attenzione a trasformazioni di coordinate nel piano. Siano dunque $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali, equiorientati e tali che $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3$ (Figura 4.1).

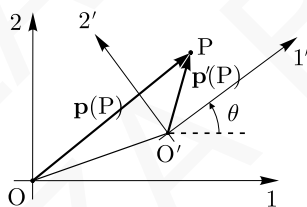


Figura 4.1.

Considerazioni di trigonometria elementare mostrano che

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Queste formule si possono immediatamente interpretare introducendo il tensore ortogonale

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}(\vartheta, \mathbf{e}_3) = \cos \vartheta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) - \sin \vartheta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (4.2)$$

Infatti, come subito si controlla,

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.3)$$

La trasformazione lineare descritta da $\mathbf{Q}$ è una rotazione antioraria attorno all'asse di versore $\mathbf{e}_3$, di un angolo pari a ϑ radianti.

Osservazioni.

1. Il tensore $\mathbf{Q}$ si può costruire definendolo come

$$\mathbf{Q} := \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (4.4)$$

e valendosi delle relazioni trigonometriche (4.1).

2. La rappresentazione matriciale di $\mathbf{Q}$ nella base tensoriale ortogonale costituita dalle diadi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ è:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

infatti, per definizione di componenti di un tensore in quella base, dev'essere:

$$Q_{ij} = (\mathbf{e}'_h \otimes \mathbf{e}_h) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i = \cos \widehat{ij'}. \quad (4.6)$$

Si vede facilmente che $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, e cioè, che (4.4) definisce effettivamente un tensore ortogonale. Infatti, per definizione di prodotto diadico di vettori,

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_i; \quad (4.7)$$

quindi,

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_i)(\mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{I} \quad (4.8)$$

(si controlli che accade anche che $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, cosicchè $\mathbf{Q}^T$ inverte $\mathbf{Q}$ in senso pieno, da sinistra e da destra). Proprio perchè la trasformazione trasposta inverte la rotazione di ϑ che porta i vettori $\mathbf{e}_i$ nei vettori $\mathbf{e}'_i$, non stupisce che valgano le relazioni

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^T \mathbf{e}'_i, \quad (4.9)$$

e

$$\mathbf{Q}^T = \widehat{\mathbf{Q}}(-\vartheta, \mathbf{e}_3) \quad (4.10)$$

e che, infine,

$$[\mathbf{Q}^T] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Poniamo

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{P}) := \mathbf{P} - \mathbf{O}, \quad \hat{\mathbf{p}}'(\mathbf{P}) := \mathbf{P} - \mathbf{O}' \quad (4.12)$$

per i vettori posizione del generico punto P del piano rispetto alle origini O e O'. Com'è mostra la Figura 4.1,

$$\hat{\mathbf{p}}(P) = \hat{\mathbf{p}}(O') + \hat{\mathbf{p}}'(P), \quad \text{ovvero} \quad \hat{\mathbf{p}}'(P) = \hat{\mathbf{p}}(P) - \hat{\mathbf{p}}(O'). \quad (4.13)$$

Esprimiamo adesso il vettore $\hat{\mathbf{p}}'(P)$ in termini delle coordinate di P nella base con apice e il vettore $(\hat{\mathbf{p}}(P) - \hat{\mathbf{p}}(O'))$ nella base senza apice:

$$\mathbf{p}'(P) = x'_i(P)\mathbf{e}'_i, \quad \hat{\mathbf{p}}(P) - \hat{\mathbf{p}}(O') = (x_i(P) - x_i(O'))\mathbf{e}_i,$$

donde, facendo anche uso di (4.9),

$$x'_i(P)\mathbf{e}'_i = (x_i(P) - x_i(O'))\mathbf{Q}^T\mathbf{e}'_i \Rightarrow x'_i(P)(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = (x_i(P) - x_i(O'))\mathbf{Q}^T\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$$

e quindi, ricordando che $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ e che $\mathbf{Q}^T\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = Q_{ji}^T$,

$$x'_j(P) = Q_{ji}^T(x_i(P) - x_i(O')). \quad (4.14)$$

Ponendo per comodità

$$a_j := -Q_{ji}^T x_i(O'), \quad (4.15)$$

otteniamo finalmente la formula

$$x'_j = Q_{ji}^T x_i + a_j, \quad (4.16)$$

che consente di trasformare le coordinate di un punto P rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale assegnato nelle coordinate che a quel punto spettano in un altro simile riferimento, che differisce dal primo per una *traslazione* d'origine, misurata dal vettore $\mathbf{a} = a_j\mathbf{e}'_j$ (con $a_3 = 0$), ed una *rotazione*, misurata dal tensore $\mathbf{Q}$. Per concludere, notiamo che (4.16) implica, in particolare, che

$$a_j = x'_j(O); \quad (4.17)$$

e che, ponendo

$$x'_1 \equiv x', \quad x'_2 \equiv y'; \quad x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y; \quad a_1 \equiv \alpha, \quad a_2 \equiv \beta,$$

le prime due di (4.16) prendono l'aspetto seguente:

$$\begin{cases} x' = \cos \vartheta x + \sin \vartheta y + \alpha, \\ y' = -\sin \vartheta x + \cos \vartheta y + \beta \end{cases} \quad (4.18)$$

(la terza delle (4.16) è la relazione banale $x'_3 = x_3$).

Esercizi

1. Trovare le relazioni che invertono le (4.18).

Sol. Conviene cominciare da (4.14), dalla quale si trae che

44 4 Geometria dei sistemi piani di masse

$$Q_{hj}x'_j(P) = Q_{hj}Q_{ji}^T(x_i(P) - x_i(O')) = \delta_{hi}(x_i(P) - x_i(O')) = (x_h(P) - x_h(O')),$$

ovvero

$$x_h(P) = Q_{hj}x'_j(P) + x_h(O')$$

e quindi, finalmente,

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta x' - \sin \vartheta y' + \alpha', \\ y = \sin \vartheta x' + \cos \vartheta y' + \beta', \end{cases} \quad (4.19)$$

dove

$$\alpha' = x(O'), \quad \beta' = y(O'). \quad (4.20)$$

2. La rotazione $\mathbf{Q}(\vartheta, \mathbf{e}_3)$ manda la terna di versori $\mathbf{e}_i$ nella terna $\mathbf{e}'_i$, come specificato da (4.3). Se la rotazione $\mathbf{Q}(\varphi, \mathbf{e}_3)$ manda la terna di versori $\mathbf{e}_i$ nella terna $\mathbf{e}''_i$, provare che

$$\mathbf{Q}(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{Q}(\vartheta, \mathbf{e}_3) = \mathbf{Q}(\varphi + \vartheta, \mathbf{e}_3). \quad (4.21)$$

Sol. Ciò che si deve provare è che la composizione delle due rotazioni è una rotazione di identico asse, di angolo pari alla somma degli angoli.¹ Procedendo in notazione diretta, visto che

$$\mathbf{Q}(\vartheta, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{Q}(\varphi, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}''_i \otimes \mathbf{e}'_i,$$

si trova che

$$\mathbf{Q}(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{Q}(\vartheta, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}''_i \otimes \mathbf{e}'_i)(\mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}''_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

Procedendo con il formalismo matriciale, si trova che

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{Q}(\vartheta, \mathbf{e}_3)] &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta & -(\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \vartheta) & 0 \\ \cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \vartheta) & -\sin(\varphi + \vartheta) & 0 \\ \sin(\varphi + \vartheta) & \cos(\varphi + \vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio richiede di ricordare le formule di addizione della trigonometria.

¹ La composizione di due rotazioni $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ qualsiasi è sempre una rotazione:

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^T = \mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1^{-1} = (\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^{-1}, \quad \det(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2) = \det \mathbf{Q}_1 \det \mathbf{Q}_2 = 1;$$

l'asse di $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ dipende in modo piuttosto complesso dagli assi di $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$.

4.2 Centro di massa. Momenti del primo ordine

Consideriamo una *distribuzione superficiale di massa* sul piano $x_3 = 0$, caratterizzata da una misura scalare m assolutamente continua rispetto alla misura di area:

$$dm = \rho(P)dA, \quad \rho(P) \geq 0; \quad (4.22)$$

se $\mathcal{R}$ è una regione limitata di quel piano, diciamo

$$m(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} dm \quad (4.23)$$

la *massa* di $\mathcal{R}$.

Osservazioni.

1. Tipicamente, avremo che $\rho(P) \equiv \text{cost.}$ sulla regione in esame (tant'è che si parla spesso di *geometria delle aree*, invece che delle masse, per le questioni che tratteremo). Questa ipotesi non è necessaria ad ottenere alcuno dei successivi sviluppi. Tuttavia, negli esercizi che faremo in preparazione alle applicazioni alla valutazione del cemento nella sezione di travi e travature, assumeremo formalmente che sia $\rho(P) \equiv +1$ (oppure -1 , come nell'Esercizio 2 alla fine di questa sezione) sulle regioni considerate.

2. Considerare distribuzioni di massa su linee, o concentrate in un insieme finito di punti (il caso dei sistemi di punti materiali), richiede alcune più o meno ovvie modificazioni formali, che qui non specifichiamo nell'interesse della scorrevolezza di esposizione.

Data la restrizione ad una regione $\mathcal{R}$ di una distribuzione superficiale di massa e scelto nel suo piano un riferimento cartesiano ortogonale di origine O , il vettore

$$\hat{\mathbf{p}}(G) = \frac{1}{m(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{p}}(P) dm \quad (4.24)$$

individua la posizione rispetto ad O di un punto G del piano che diremo *centro di massa* di $\mathcal{R}$.²

La nozione di centro di massa di una regione data non dipende dal sistema di riferimento scelto. Per convincersene, basta applicare la definizione (4.24) valendosi del riferimento con apice introdotto in Figura 4.1. Allora, con l'uso reiterato della relazione (4.13), si ottiene:

$$\frac{1}{m(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{p}}'(P) dm = \frac{1}{m(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} (\hat{\mathbf{p}}(P) - \hat{\mathbf{p}}(O')) dm = \hat{\mathbf{p}}(G) - \hat{\mathbf{p}}(O') = \hat{\mathbf{p}}'(G).$$

Dipendono invece dal riferimento le coordinate di G :

² Il punto G viene detto correntemente il *baricentro* di $\mathcal{R}$; una dizione precisa dovrebbe essere *centro della distribuzione di massa m relativamente alla regione $\mathcal{R}$* .

$$\begin{aligned} x(G) &= \frac{1}{m(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} x dm = \frac{1}{m(\mathcal{R})} S_y(\mathcal{R}), \\ y(G) &= \frac{1}{m(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} y dm = \frac{1}{m(\mathcal{R})} S_x(\mathcal{R}); \end{aligned} \quad (4.25)$$

le quantità scalari

$$S_x(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} y dm, \quad S_y(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} x dm \quad (4.26)$$

prendono il nome di *momenti del primo ordine* della regione $\mathcal{R}$ nel riferimento dato.

Non è difficile determinare come i momenti del primo ordine dipendano dal riferimento di coordinate: ricordando le relazioni (4.18), troviamo che

$$\begin{aligned} S_{x'}(\mathcal{R}) &= \int_{\mathcal{R}} y' dm = \int_{\mathcal{R}} (-\sin \vartheta x + \cos \vartheta y + \beta) dm, \\ S_{y'}(\mathcal{R}) &= \int_{\mathcal{R}} x' dm = \int_{\mathcal{R}} (\cos \vartheta x + \sin \vartheta y + \alpha) dm, \end{aligned}$$

e quindi (sopprimendo per brevità l'indicazione di $\mathcal{R}$, come di regola faremo d'ora in avanti)

$$\begin{cases} S_{x'} = \cos \vartheta S_x - \sin \vartheta S_y + m \beta, \\ S_{y'} = \sin \vartheta S_x + \cos \vartheta S_y + m \alpha. \end{cases} \quad (4.27)$$

In particolare, se $\vartheta = 0$, si ottiene il cosiddetto *teorema di trasporto* per i momenti del primo ordine;

$$\begin{cases} S_{x'} = S_x + m \beta, \\ S_{y'} = S_y + m \alpha. \end{cases} \quad (4.28)$$

Queste formule mostrano che un momento del primo ordine si annulla se e solo se viene calcolato rispetto ad un *asse centrale*, cioè, ad un asse che passi per il centro di massa: ad esempio, facendo uso, nell'ordine, di (4.28)₁, (4.25)₂ e (4.18)₂ per $\vartheta = 0$, si trova che

$$S_{x'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} S_x = -\beta \quad \Leftrightarrow \quad y(G) = y(O') \quad \Leftrightarrow \quad G \equiv O'.$$

Osservazione. Per rintracciare l'origine della denominazione corrente, *momenti statici*, per i momenti del primo ordine, ci si riferisca alla Figura 4.2, immaginando la regione $\mathcal{R}$ come un corpo rigido piatto, pesante e in grado di ruotare attorno all'asse x , abbandonato con velocità nulla nella posizione della figura. Perchè questo problema di equilibrio abbia soluzione in *statica*, occorre e basta che il *momento* risultante della forza peso $\rho \mathbf{g}$ ($\mathbf{g} \equiv$ accelerazione di gravità) rispetto all'asse x sia nullo, cioè, equivalentemente, che $S_x = 0$, ovvero che l'asse x passi per il *baricentro* (qui questa denominazione è appropriata!) del corpo rigido $\mathcal{R}$.

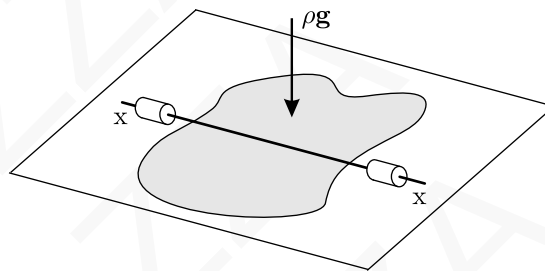


Figura 4.2.

Esercizi.

1. Per il rettangolo in Figura 4.3, calcolare i momenti del primo ordine rispetto agli assi x, y e x', y' .

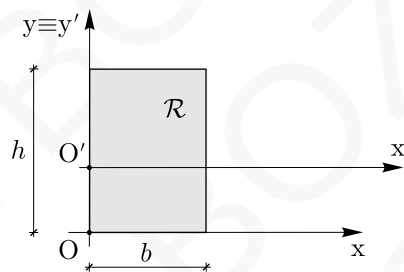


Figura 4.3.

Sol. Poniamo

$$\rho(P) \equiv 1 \text{ per } P \in \mathcal{R}.$$

Per applicazione diretta delle (4.26) abbiamo che

$$S_x = \int_{\mathcal{R}} y dm = \int_0^b \int_0^h y dx dy = \frac{1}{2} b h^2,$$

$$S_y = \int_{\mathcal{R}} x dm = \frac{1}{2} b^2 h.$$

Usando le (4.28) e ricordando le definizioni di α e β , otteniamo poi che

$$S_{y'} = S_y,$$

$$S_{x'} = \frac{1}{2} b h^2 + (b h)(-y(O')).$$

Dall'ultima relazione si ricava, ad esempio, che

$$S_{x'} = 0 \Leftrightarrow y(O') = \frac{1}{2} h;$$

48 4 Geometria dei sistemi piani di masse

e che $S_{x'} = -S_x$, se l'asse x' è tangente alla base superiore del rettangolo.

2. Calcolare i momenti del primo ordine per la superficie in Figura 4.4.

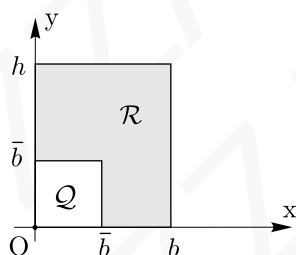


Figura 4.4.

Sol. Il calcolo è spedito se si sfrutta l'additività che i momenti del primo ordine possiedono per definizione. Si può infatti porre

$$\rho(P) \equiv 1 \text{ per } P \in \mathcal{R}, \quad \rho(P) \equiv -1 \text{ per } P \in \mathcal{Q},$$

dove $\mathcal{R}$ è il rettangolo dell'esercizio precedente, e si ottiene immediatamente che

$$S_x(\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}) = S_x(\mathcal{R}) - S_x(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2}bh^2 - \frac{1}{2}\bar{b}^3, \quad \text{etc.}$$

3. Trovare il centro di massa della regione in Figura 4.5.

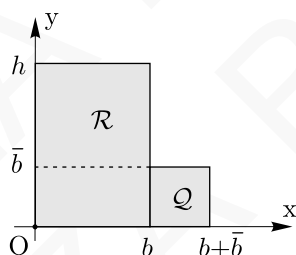


Figura 4.5.

Sol. Per definizione,

$$\begin{aligned} y(G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{Q}}) &= \frac{1}{m(\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})} S_x(\mathcal{R} \cup \mathcal{Q}) = \frac{S_x(\mathcal{R}) + S_x(\mathcal{Q})}{m(\mathcal{R}) + m(\mathcal{Q})} \\ &= \frac{m(\mathcal{R})y(G_{\mathcal{R}}) + m(\mathcal{Q})y(G_{\mathcal{Q}})}{m(\mathcal{R}) + m(\mathcal{Q})}, \end{aligned}$$

etc. Una formula di questo genere consente di trovare il centro di massa di una figura composta una volta noti i centri di massa delle figure che ne

realizzano una qualunque decomposizione (magari con sovrapposizioni, come abbiamo visto nell'esercizio precedente); le elementari operazioni necessarie a eseguire il calcolo hanno ben noti equivalenti grafici (regola della leva, poligono funicolare, ...).

4. Trovare il centro di massa del triangolo isoscele in Figura 4.6.

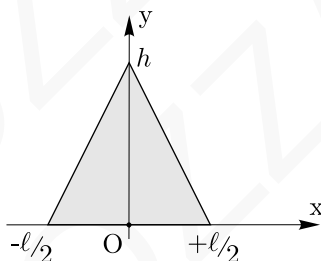


Figura 4.6.

Sol. Come è facile desumere dalla figura, i punti dei lati obliqui hanno coordinate $(x(y), y)$, con

$$x(y) = \frac{l}{2h}(h - y).$$

Perciò,

$$x(G) = \frac{2}{lh} \int_0^h \left(\int_{-\frac{l}{2h}(h-y)}^{+\frac{l}{2h}(h-y)} x dx \right) dy = 0.$$

D'altra parte, quando si cerca la coordinata $y(G)$, l'elemento d'area si può esprimere come

$$dA = 2x(y) dy,$$

e quindi si ottiene

$$y(G) = \frac{2}{lh} \int_0^h \frac{l(h-y)}{h} y dy = \frac{1}{3}h.$$

5. Prendendo spunto dall'esercizio precedente, provare che il centro di massa deve appartenere ad ogni asse di simmetria (magari obliqua) della regione in esame.

Sol. La Figura 4.7 mostra una regione $\mathcal{R}$ dotata di simmetria rispetto all'asse obliquo y . Formalmente,

$$m(\mathcal{R})x(G) = S_y(\mathcal{R}) = \int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0(y)}^{x_1(y)} x dx \right) dy, \quad x_0(y) = -x_1(y);$$

quindi,

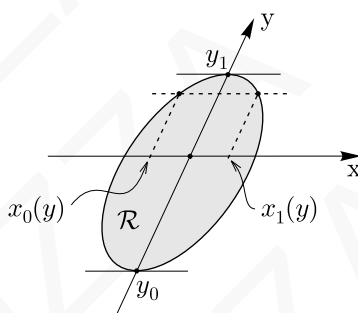


Figura 4.7.

$$\int_{-x_1(y)}^{+x_1(y)} x dx = 0$$

(in quanto integrale di una funzione dispari su un intervallo centrato rispetto all'origine), qualunque sia la funzione $y \mapsto x_1(y)$.

4.3 Momenti del secondo ordine

Data una distribuzione superficiale di massa m su un piano, i *momenti del secondo ordine* associati ad una regione $\mathcal{R}$ del piano sono quattro:

i *momenti d'inerzia assiali* $J_x(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} y^2 dm$, $J_y(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} x^2 dm$;

il *prodotto d'inerzia* $J_{xy}(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} xy dm$;

il *momento d'inerzia polare* $J_o(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) dm$.

(4.29)

Un semplice calcolo consente di stabilire la dipendenza di queste quantità dal riferimento di coordinate. Si trova, per cominciare,

$$J_{x'} = \int_{\mathcal{R}} y'^2 dm = \int_{\mathcal{R}} (-\sin \vartheta x + \cos \vartheta y + \beta)^2 dm,$$

donde

$$J_{x'} = \cos^2 \vartheta J_x + \sin^2 \vartheta J_y - \sin 2\vartheta J_{xy} + m \beta^2 + 2\beta(\cos \vartheta S_x - \sin \vartheta S_y). \quad (4.30)$$

In modo del tutto analogo si trova anche che

$$J_{y'} = \cos^2 \vartheta J_y + \sin^2 \vartheta J_x + \sin 2\vartheta J_{xy} + m \alpha^2 + 2\alpha(\sin \vartheta S_x + \cos \vartheta S_y) \quad (4.31)$$

e che

$$J_{x'y'} = \cos 2\vartheta J_{xy} + \sin 2\vartheta \frac{J_x - J_y}{2} + m\alpha\beta + \alpha(\cos \vartheta S_x - \sin \vartheta S_y) + \beta(\sin \vartheta S_x + \cos \vartheta S_y). \quad (4.32)$$

Infine, la relazione che esplicita il variare del momento polare con il riferimento di coordinate segue subito dalle (4.30) e (4.31) in ragione del fatto che, come immediata conseguenza delle definizioni (4.29)_{1,2,4}, si ha che

$$J_o = J_x + J_y; \quad (4.33)$$

registriamo tale relazione per completezza:

$$J_{o'} = J_o + m(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(\sin \vartheta S_x - \cos \vartheta S_y) + 2\beta(\cos \vartheta S_x - \sin \vartheta S_y). \quad (4.34)$$

Importanti casi particolari delle formule precedenti si ottengono prendendo:

(i) $\vartheta = 0$ e gli assi x, y per il centro di massa (*teorema di trasporto di Huyghens*)

$$\begin{cases} J_{x'} = J_x + m\beta^2, \\ J_{y'} = J_y + m\alpha^2, \\ J_{x'y'} = J_{xy} + m\alpha\beta, \\ J'_o = J_o + m(\alpha^2 + \beta^2); \end{cases} \quad (4.35)$$

(ii) $\alpha = \beta = 0$ (*teorema di Steiner*)

$$\begin{cases} J_{x'} = \cos^2 \vartheta J_x + \sin^2 \vartheta J_y - \sin 2\vartheta J_{xy}, \\ J_{y'} = \cos^2 \vartheta J_y + \sin^2 \vartheta J_x + \sin 2\vartheta J_{xy}, \\ J_{x'y'} = \cos 2\vartheta J_{xy} + \sin 2\vartheta \frac{J_x - J_y}{2}, \\ J_{o'} = J_o. \end{cases} \quad (4.36)$$

Il teorema di Huyghens si applica quando $\vartheta = 0$ e $O \equiv G$, quello di Steiner quando $\vartheta \neq 0$ e $O \equiv O'$. Una situazione intermedia, che adesso considereremo, si verifica quando $\vartheta \neq 0$ e $O \equiv G$. Sia dunque x, y una coppia di assi ortogonali per il centro di massa. Sia x', y' una seconda coppia di assi ortogonali, con l'asse che forma l'angolo ϑ con l'asse x , con ϑ contato positivamente in senso antiorario (Figura 4.8). Volendo studiare la dipendenza dall'angolo di $J_{x'}$, osserviamo che la formula (4.30) fornisce:

$$J_{x'} = j(\vartheta) + m\beta^2, \quad j(\vartheta) := \cos^2 \vartheta J_x + \sin^2 \vartheta J_y - \sin 2\vartheta J_{xy}. \quad (4.37)$$

Anzitutto, osserviamo che $j(\vartheta)$ rappresenta il valore del momento d'inerzia rispetto all'asse x'' per il centro di massa parallelo all'asse x' . Lo studio della funzione j è di carattere elementare; i punti di stazionarietà si hanno per

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_0 &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \\ &= \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

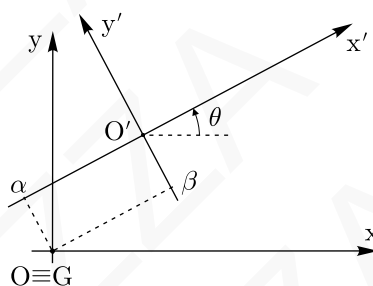


Figura 4.8.

Gli angoli ϑ_0 e $\vartheta_0 + \pi/2$ individuano una coppia di assi ξ, η per il centro di massa, che prendono il nome di *assi d'inerzia principali centrali*; rispetto all'asse ξ (η) il momento assiale è massimo (minimo) al variare di ϑ e i valori dei *momenti d'inerzia assiali principali centrali* J_ξ, J_η sono:

$$\left. \begin{matrix} J_\xi \\ J_\eta \end{matrix} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (4.39)$$

Esercizio.

Calcolare i momenti del secondo ordine del rettangolo in Figura 4.9 rispetto alle coppie di assi x', y' e x, y , la seconda delle quali ha origine nel centro di massa.

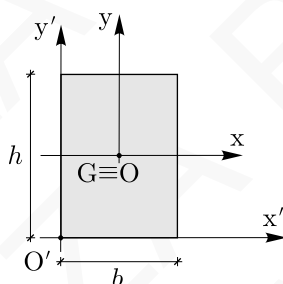


Figura 4.9.

Sol. Per prima cosa, calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse x' :

$$J_{x'} = \int_{\mathcal{R}} y'^2 dm = \int_0^b \left(\int_0^h y'^2 dy' \right) dx' = \frac{1}{3} b h^3. \quad (4.40)$$

Quindi, facendo uso del teorema di Huyghens, calcoliamo:

$$J_x = J_{x'} - m\beta^2 = \frac{1}{3}bh^3 - (bh)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3. \quad (4.41)$$

Per trovare gli altri momenti del secondo ordine si procede nello stesso modo.

4.4 Il tensore d'inerzia

La nomenclatura che abbiamo usato per i momenti del secondo ordine è quella introdotta da Eulero verso la metà del XVIII secolo. Si deve ad Eulero l'introduzione di un tensore simmetrico, il *tensore d'inerzia*, che riassume in modo sintetico l'informazione indispensabile a descrivere una distribuzione di massa, tanto nell'ambito dello studio sul moto di corpi rigidi che motivò Eulero ad introdurlo quanto per le applicazioni alla meccanica delle strutture travate che qui ci interessano.

Il tensore d'inerzia di una regione $\mathcal{R}$ è così definito:

$$\mathbf{J}(\mathcal{R}) := \left(\int_{\mathcal{R}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} dm \right) \mathbf{I} - \int_{\mathcal{R}} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} dm, \quad (4.42)$$

dove $\mathbf{p}$ indica il vettore posizione del punto $P \in \mathcal{R}$ rispetto al polo (all'origine) $O \in \mathcal{E}$ e dove $\mathcal{R}$ è, in generale, una regione limitata dello spazio euclideo tridimensionale $\mathcal{E}$. A parte per la dipendenza dall'origine, che ne è un carattere intrinseco, la definizione del tensore d'inerzia è indipendente dalla scelta di un riferimento di coordinate, ovvero è, come si suol dire, una definizione 'assoluta', dalla quale si possono dedurre in modo diretto tutte le proprietà elencate nella sezione precedente.

Se si sceglie un secondo polo O' , che differisca dal primo per la traslazione $\mathbf{d} := O - O'$, indicando con $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$ il vettore posizione di $P \in \mathcal{R}$ rispetto al nuovo polo e con

$$\mathbf{s}(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{p} dm \quad (4.43)$$

il *vettore momento statico*, si trova la relazione generale di trasporto:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + m((\mathbf{d} \cdot \mathbf{d})\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) + 2(\mathbf{d} \cdot \mathbf{s})\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{s} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{d}, \quad (4.44)$$

della quale il teorema di Huyghens è un caso particolare, quando la regione $\mathcal{R}$ è piatta e il punto $O \equiv G$ ne è il centro di massa.³ Se la regione $\mathcal{R}$ è contenuta nel piano $x_3 = 0$, le rappresentazioni matriciali di $\mathbf{J}$, $\mathbf{d}$ e $\mathbf{s}$ nel riferimento cartesiano ortogonale $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sono:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ \cdot & J_y & 0 \\ \cdot & \cdot & J_o \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} S_y \\ S_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

³ Infatti,

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad O \equiv G, \text{ il centro di massa di } \mathcal{R}.$$

Una rotazione di $\mathcal{R}$ attorno al polo O si realizza ponendo

$$\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}\mathbf{p}, \quad \text{con } \mathbf{Q} \text{ un tensore ortogonale.}$$

Applicando la definizione (4.42), si vede che $\mathbf{J}'$, il tensore d'inerzia della regione ruotata $\mathcal{R}'$, dev'essere il coniugato ortogonale del tensore d'inerzia della regione data:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^T. \quad (4.46)$$

Supponiamo ora che la regione $\mathcal{R}$ sia piatta e contenuta nel piano $x_3 = 0$, come il rettangolo di Figura 4.10, e che la rotazione $\mathbf{Q}$ abbia asse $\mathbf{e}_3$. In un

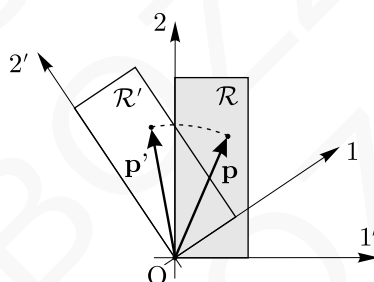


Figura 4.10.

primo modo di osservarla, questa figura mostra il corpo $\mathcal{R}$ che ruota rispetto allo 'sfondo' rispetto al quale viene osservato – lo spazio piatto identificato punto per punto con il piano $x_3 = 0$ – fino ad occupare la regione $\mathcal{R}'$. Questa lettura della figura induce ad attendersi che ogni componente del tensore $\mathbf{J}'$ nel riferimento con apice sia identica a quella con gli stessi indici del tensore $\mathbf{J}$ nel riferimento senza apice:

$$\mathbf{J}' \cdot \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j; \quad (4.47)$$

questo è effettivamente ciò che l'algebra fornisce, facendo uso di (4.46) e di (4.3):

$$\mathbf{J}' \cdot \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q}\mathbf{e}_j) = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{Q}^T = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.^4$$

Un secondo modo di osservare la figura è intendendo di disporre di due copie sovrapposte dello spazio-sfondo, l'una ruotata rispetto all'altra attorno ad O come indicano le coppie di assi con e senza apice, mentre il corpo $\mathcal{R}$ resta

⁴ L'operazione di coniugazione ortogonale conserva il prodotto scalare di tensori:

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin},$$

qualunque sia il tensore ortogonale $\mathbf{Q}$.

fermo. Questo modo di osservare consente di riottenere rapidamente le formule di trasformazione dei momenti d'inerzia al variare del riferimento, che abbiamo stabilito in modo più elementare nella sezione precedente. Ad esempio, visto che

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q}\mathbf{e}_j), \quad (4.48)$$

non è difficile ritrovare il teorema di Steiner: scegliendo per cominciare $i = j = 1$ in (4.48), usando la prima delle relazioni (4.1) e ricordando la rappresentazione matriciale (4.45)₁, si ottiene:

$$\begin{aligned} J_{x'} &= \mathbf{J} \cdot (\cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_2) \otimes (\cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_2) \\ &= \cos^2 \vartheta \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sin^2 \vartheta \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{J} \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \\ &= \cos^2 \vartheta J_x + \sin^2 \vartheta J_y - \sin 2\vartheta J_{xy}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Esercizio.

Trovare le autocopie del tensore d'inerzia relativo ad una qualunque regione contenuta nel piano $x_3 = 0$.

Sol. Si ricordi l'Osservazione 1 alla fine della Sezione 3.5.2. La rappresentazione matriciale (4.45)₁ mostra che $(J_o, \mathbf{e}_3)$ è un'autocoppia. La ricerca delle altre autocopie si può quindi eseguire considerando l'equazione secolare ridotta

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - (J_x + J_y)\lambda + (J_x J_y - J_{xy}^2), \quad (4.49)$$

le cui radici sono fornite dalle formule (4.39).

Per trovare l'autovettore ortogonale a $\mathbf{e}_3$ corrispondente all'autovalore

$$J_\xi = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} (J_x - J_\xi)n_1 - J_{xy}n_2 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 = 1 \end{cases}, \quad (4.50)$$

ottenendo

$$n_1 = \sqrt{\frac{J_{xy}^2}{(J_x - J_\xi)^2 + J_{xy}^2}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{(J_x - J_\xi)^2}{(J_x - J_\xi)^2 + J_{xy}^2}}. \quad (4.51)$$

Per trovare poi l'autovettore corrispondente all'autovalore

$$J_\eta = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} -J_{xy}n_1 + (J_y - J_\eta)n_2 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 = 1 \end{cases}; \quad (4.52)$$

si ottiene:

$$n_1 = \sqrt{\frac{(J_y - J_\eta)^2}{(J_y - J_\eta)^2 + J_{xy}^2}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{J_{xy}^2}{(J_y - J_\eta)^2 + J_{xy}^2}}. \quad (4.53)$$

Queste formule hanno una ben nota versione grafica, dovuta a O. Mohr (Figura 4.11). Il *cerchio di Mohr* relativo ad una figura piana, che abbia mo-

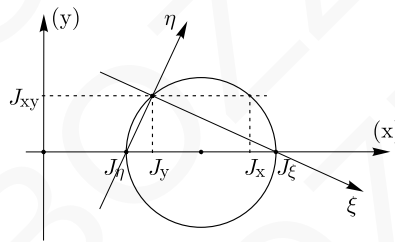


Figura 4.11.

menti d'inerzia assiali J_x, J_y e prodotto d'inerzia J_{xy} rispetto ad una coppia di assi x, y per il centro di massa, si costruisce nel piano coordinato degli assi x, y , con

$$centro \equiv \left(\frac{J_x + J_y}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad \text{raggio} = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (4.54)$$

È facile vedere che, una volta costruito questo cerchio, i momenti principali se ne ottengono come intercette con l'asse orizzontale; e che gli assi principali hanno le direzioni delle rette mutuamente ortogonali che congiungono tali intercette con il punto sul cerchio di coordinate (J_y, J_{xy}) .⁵ Precisamente, le autocopie sono:

$$\begin{aligned} (J_\xi, \xi), \quad \text{con } \xi &:= ((J_\xi - J_x)^2 + J_{xy}^2)^{-1/2} (J_{xy}\mathbf{e}_1 - (J_\xi - J_x)\mathbf{e}_2), \\ (J_\eta, \eta), \quad \text{con } \eta &:= ((J_y - J_\eta)^2 + J_{xy}^2)^{-1/2} ((J_y - J_\eta)\mathbf{e}_1 + J_{xy}\mathbf{e}_2), \end{aligned} \quad (4.55)$$

dove ξ, η sono i versori degli assi principali centrali ξ, η .

⁵ Infatti, ad esempio, si desume dalla figura che la retta che passa per i punti (J_y, J_{xy}) e $(J_\eta, 0)$ ha coefficiente angolare $J_{xy}/(J_y - J_\eta)$, pari al rapporto n_2/n_1 fornito dalla prima delle (4.52); questa retta fornisce quindi la posizione dell'asse principale centrale η rispetto all'asse x .