

Travature reticolari

Un sistema reticolare è rappresentato da un insieme di punti, o nodi, nello spazio, che sono individuati dalle loro coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale, e da un insieme di travi rettilinee, o aste, che collegano i nodi a coppie. Le aste sono connesse ai nodi alle estremità mediante cerniere

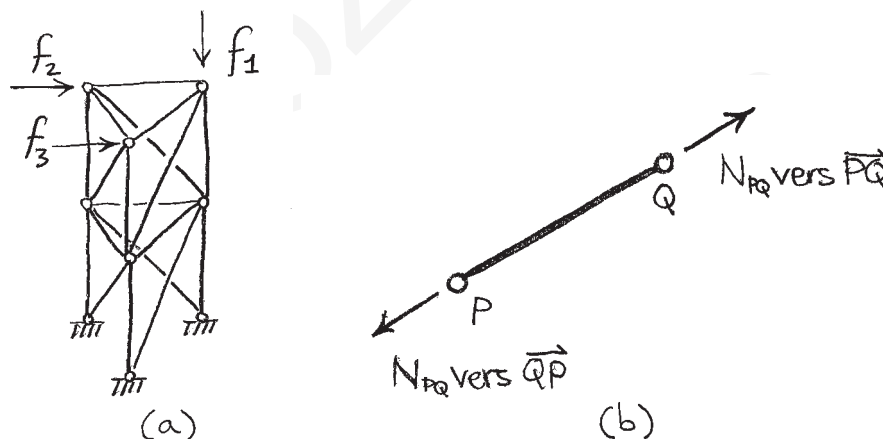


Figura 7.1.

sferiche. Inoltre, si assume che i carichi esterni siano costituiti soltanto da forze applicate sui nodi (Fig. 7.1(a)).

Ogni asta, tramite le cerniere, è sottoposta a due forze che, poiché sull'asta non agiscono altri carichi, devono essere collineari per soddisfare l'equilibrio alla rotazione intorno ad uno degli estremi (Fig. 7.1(b)). Come conseguenza, l'unica caratteristica di sollecitazione presente nel sistema è lo sforzo normale, costante in ciascuna asta.

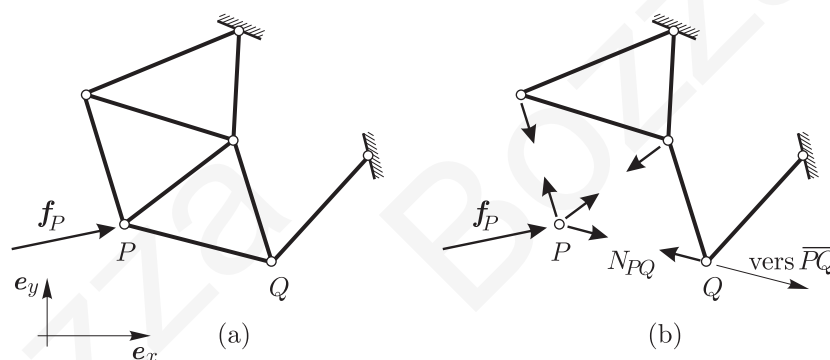


Figura 7.2.

30 Metodo degli equilibri nodali

Ai fini delle equazioni di equilibrio, è conveniente considerare i nodi come dei corpi rigidi puntiformi, mentre le aste costituiscono dei pendoli che vincolano i nodi a coppie. Su ogni nodo agiscono quindi delle forze dirette secondo le linee d'asse delle aste (Fig. 7.2). Il sistema allora è in equilibrio se e solo se per ogni nodo il risultante delle forze agenti su di esso è nullo, essendo l'annullamento del momento risultante garantito. Per ogni nodo possiamo quindi scrivere tre equazioni di equilibrio alla traslazione nel caso di sistemi tridimensionali, oppure due equazioni nel caso di sistemi piani. I carichi esterni costituiscono le quantità note, mentre le incognite sono gli sforzi normali nelle aste e le reazioni dei vincoli esterni.

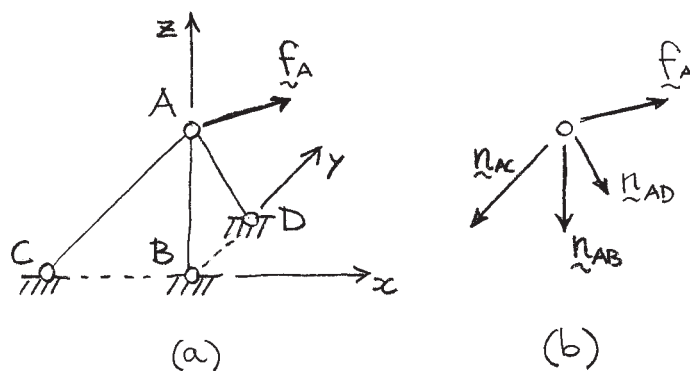


Figura 7.3.

Per cominciare analizziamo il sistema tridimensionale mostrato in Fig. 7.3(a), composto solamente da un nodo collegato a terra da tre aste¹, caricato in A dalla forza

$$\mathbf{f}_A = f \text{ vers } (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Le coordinate dei nodi nel riferimento $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ sono le seguenti:

$$A \equiv (0, 0, l), \quad B \equiv (0, 0, 0), \quad C \equiv (-l, 0, 0), \quad D \equiv (0, l, 0).$$

In seguito all'applicazione del carico esterno, ciascuna asta scambia con il nodo A una forza parallela all'asta stessa di entità pari allo sforzo normale (Fig. 7.3b). Ad esempio, l'azione sul nodo dovuta all'asta AB è

$$\mathbf{n}_{AB} = N_{AB} \text{ vers } \overrightarrow{AB},$$

il verso di questa forza va da A a B se l'asta è in trazione ($N_{AB} > 0$), da B ad A se l'asta è in compressione ($N_{AB} < 0$). L'equilibrio del nodo impone allora che si abbia

$$\mathbf{f}_A + \mathbf{n}_{AB} + \mathbf{n}_{AC} + \mathbf{n}_{AD} = \mathbf{0},$$

ovvero

$$\mathbf{f}_A + N_{AB} \text{ vers } \overrightarrow{AB} + N_{AC} \text{ vers } \overrightarrow{AC} + N_{AD} \text{ vers } \overrightarrow{AD} = \mathbf{0}.$$

Riscrivendo questa equazione sotto forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{AB} \\ N_{AC} \\ N_{AD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{Ax} \\ f_{Ay} \\ f_{Az} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

si vede facilmente che la caratteristica della matrice del sistema è pari a quella della matrice completa e quindi esiste una unica soluzione:

$$N_{AB} = 0, \quad N_{AC} = f, \quad N_{AD} = -f.$$

In conclusione, l'asta AB risulta scarica, l'asta AC tesa mentre l'asta AD è compressa.

Un sistema nel piano analogo al precedente è l'arco a tre cerniere di Fig. 7.4. Il nodo C , collegato a terra da due aste, è sottoposto all'azione del carico generico $\mathbf{f}_C = f_{Cx} \mathbf{e}_x + f_{Cy} \mathbf{e}_y$.

L'equilibrio di C impone che si abbia

$$\mathbf{f}_C + N_{AC} \text{ vers } \overrightarrow{CA} + N_{BC} \text{ vers } \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}.$$

Considerando che nella base scelta si ha

$$\text{vers } \overrightarrow{CA} = -\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y,$$

¹ Abbiamo già incontrato un sistema simile a questo nell'esercizio ??.

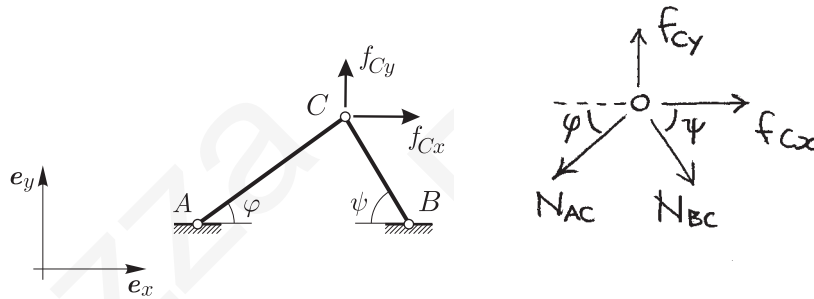


Figura 7.4.

$$\text{vers } \overrightarrow{CB} = \cos \psi \mathbf{e}_x - \sin \psi \mathbf{e}_y,$$

l'equazione precedente si scrive in componenti come

$$N_{AC} \cos \varphi - N_{BC} \cos \psi = f_{Cx},$$

$$N_{AC} \sin \varphi + N_{BC} \sin \psi = f_{Cy}.$$

oppure, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\cos \psi \\ \sin \varphi & \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{AC} \\ N_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{Cx} \\ f_{Cy} \end{bmatrix}. \quad (30.1)$$

Prendiamo ora in esame il sistema piano in Fig. 7.5. Le aste oblique formano un angolo α con l'orizzontale e l'unico carico esterno è la forza in A pari a $\mathbf{f}_A = -f \mathbf{e}_y$. Per determinare gli sforzi nelle aste, consideriamo dapprima

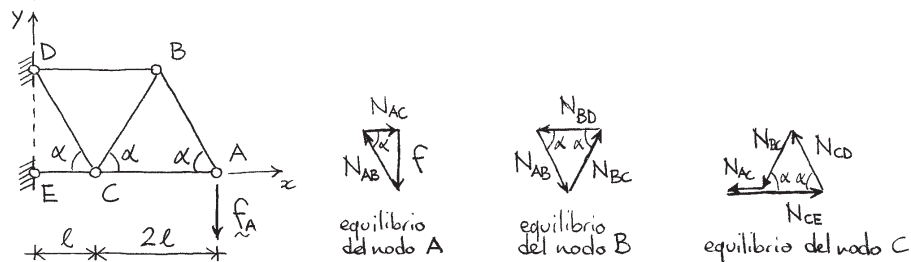


Figura 7.5.

l'equilibrio del nodo A: il carico esterno $\mathbf{f}_A$ e gli sforzi normali delle aste AB e AC devono essere in equilibrio,

$$\mathbf{f}_A + N_{AB} \text{vers } \overrightarrow{AB} + N_{AC} \text{vers } \overrightarrow{AC} + \mathbf{0}.$$

Risolvendo si ha $N_{AB} = f/\sin \alpha$ e $N_{AC} = -f/\tan \alpha$. Passando a considerare l'equilibrio del nodo B si ha:

$$N_{AB} \text{ vers } \overrightarrow{BA} + N_{BC} \text{ vers } \overrightarrow{BC} + N_{BD} \text{ vers } \overrightarrow{BD} = \mathbf{0}.$$

Notiamo che in questa equazione il termine dovuto allo sforzo nell'asta AB ha segno opposto rispetto alla equazione di equilibrio del nodo A . Poiché N_{AB} è già noto, possiamo risolvere le due equazioni scalari corrispondenti ed ottenere $N_{BC} = -N_{AB} = f/\sin \alpha$ e $N_{BD} = 2N_{AB} \cos \alpha = 2f/\tan \alpha$. Rimane da considerare l'equazione di equilibrio del nodo C , scritta di seguito:

$$N_{AC} \text{ vers } \overrightarrow{CA} + N_{BC} \text{ vers } \overrightarrow{CB} + N_{CD} \text{ vers } \overrightarrow{CD} + N_{CE} \text{ vers } \overrightarrow{CE} = \mathbf{0}.$$

Avendo determinato N_{AC} ed N_{BC} possiamo ricavare le incognite rimanenti, $N_{CD} = -N_{BC} = f/\sin \alpha$, $N_{CE} = 3N_{AC} = -3f/\tan \alpha$.

OSSERVAZIONI. 1. Risulta conveniente analizzare per primi i nodi in cui concorrono poche aste, per poi passare a quelli adiacenti. Se per un nodo le incognite sono in numero inferiore o uguale a tre [due] nel caso di un sistema tridimensionale [piano] allora la loro determinazione è possibile senza bisogno di analizzare gli altri nodi. Fa eccezione il caso in cui le tre [due] aste corrispondenti siano complanari [collineari], dato che una delle equazioni di equilibrio non fornisce alcuna condizione utile alla determinazione delle incognite.

2. Non sempre è possibile risolvere il problema studiando un nodo per volta. Il metodo più generale di soluzione consiste nello scrivere direttamente il sistema di tutte le equazioni di equilibrio e poi risolverlo con i metodi noti. Nel caso appena esaminato si ha:

$$\begin{bmatrix} -\cos \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & -\cos \alpha & -1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos \alpha & 0 & -\cos \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{AB} \\ N_{AC} \\ N_{BC} \\ N_{BD} \\ N_{CD} \\ N_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{Ax} \\ f_{Ay} \\ f_{Bx} \\ f_{By} \\ f_{Cx} \\ f_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. La conoscenza delle reazioni vincolari non è necessaria per la determinazione degli sforzi nelle aste. Ad ogni componente di reazione incognita corrisponde sempre una ed una sola equazione di equilibrio alla traslazione, che può essere utilizzata o meno, a seconda della convenienza. Nell'esempio, l'equilibrio del nodo E impone che sia

$$\mathbf{r}_E + N_{CE} \text{ vers } \overrightarrow{EC} = \mathbf{0} \iff r_{Ex} = 3 \frac{f}{\tan \alpha}, \quad r_{Ey} = 0,$$

quindi, in particolare, la reazione in E dovrà essere diretta come $\overrightarrow{EC}$. Nel caso del nodo D , abbiamo in componenti

$$r_{Dx} + N_{BD} + N_{CD} \cos \alpha = 0 \iff r_{Dx} = -3 \frac{f}{\tan \alpha},$$

$$r_{Dy} - N_{CD} \sin \alpha = 0 \iff r_{Dy} = f.$$

Si vede bene come le reazioni così calcolate ed il carico esterno verifichino le equazioni cardinali della statica.

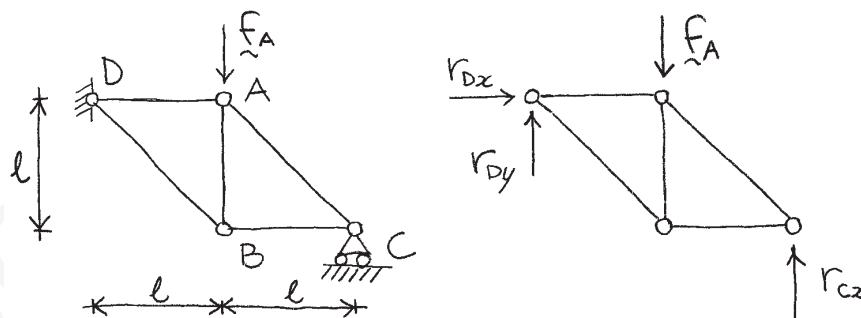


Figura 7.6.

Passiamo ora a studiare il sistema in Fig. 7.6. Il sistema è composto da cinque aste e abbiamo a disposizione cinque equazioni di equilibrio, due per il nodo A, due per il nodo B e quella alla traslazione orizzontale del nodo C. L'unico carico agente è la forza in A, $f_A = -f \mathbf{e}_y$. Come si vede, l'equilibrio dei singoli nodi non permette di ricavare immediatamente nessuno degli sforzi incogniti. Conviene allora scrivere la condizione di bilancio dei momenti intorno a D per l'intero sistema, in cui ai vincoli si sostituiscono le reazioni vincolari corrispondenti. Questa fornisce immediatamente il valore della reazione in C,

$$-lf + 2lr_{Ay} = 0 \iff r_{Ay} = \frac{1}{2}f,$$

con questa informazione e sfruttando l'equilibrio del nodo C lungo la direzione verticale possiamo ricavare lo sforzo incognito $N_{AC} = -\frac{1}{\sqrt{2}}f$ e passare alla determinazione sequenziale delle altre incognite. L'equilibrio di C lungo $\mathbf{e}_x$ fornisce $N_{BC} = \frac{1}{2}f$. Per l'equilibrio di B si ha $N_{AB} = -\frac{1}{2}f$ e $N_{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}}f$, mentre l'equilibrio di A lungo $\mathbf{e}_x$ fornisce $N_{BD} = -\frac{1}{2}f$. Infine, possiamo verificare come l'equilibrio lungo $\mathbf{e}_y$ di A sia soddisfatto.

OSSERVAZIONE. Abbiamo utilizzato due equazioni di equilibrio in più rispetto agli esempi precedenti, il bilancio dei momenti e l'equilibrio di C lungo $\mathbf{e}_y$, nel contempo non abbiamo utilizzato l'equilibrio di A lungo $\mathbf{e}_y$. L'equazione in più è stata 'spesa' per la determinazione della reazione r_{Cy} .

30.1 Ricerca di aste scariche

Vediamo ora come individuare quei casi in cui lo sforzo normale in una o più aste è nullo.

Una tipica situazione è quella di un nodo nello spazio in cui convergono tre aste non complanari [un nodo nel piano in cui convergono due aste non collineari] e sul nodo non agiscono forze esterne. L'equilibrio impone allora che gli sforzi normali nelle aste siano tutti nulli. Infatti, tre forze nello spazio [due forze nel piano] possono essere in equilibrio solamente se esse sono complanari [collineari]. Ciò si vede anche dal fatto che la matrice del sistema di equazioni di equilibrio del nodo è quadrata e non singolare, mentre il termine noto è nullo, l'unica soluzione è quindi quella nulla.

Un'altra situazione è quella in cui le forze che agiscono su un nodo nello spazio [nel piano] sono tutte complanari [collineari] eccetto una, allora la forza che non appartiene al piano [alla retta] cui appartengono le altre deve essere per forza nulla. Ciò si dimostra considerando l'equilibrio alla traslazione lungo la normale al piano [alla retta]. Nell'equazione corrispondente infatti sarà presente solamente la suddetta forza, posta uguale a zero. Questa è la situazione incontrata nell'esempio di Fig. 7.3 dove tre forze agiscono nel piano di normale $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$, mentre la quarta forza, non appartenente a questo piano, è nulla.

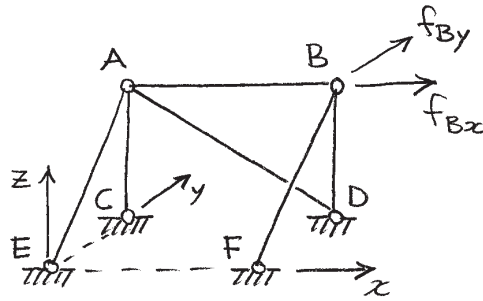


Figura 7.7.

Studiamo il sistema in Fig. 7.7, considerando dapprima il solo carico f_{Bx} , con $f_{By} = 0$. Il nodo B è sottoposto a quattro forze di cui tre nel piano xz . L'equilibrio alla traslazione lungo $\mathbf{e}_y$ impone allora che si abbia:

$$N_{BF} \text{ vers } \overrightarrow{BF} \cdot \mathbf{e}_y = 0,$$

il che implica $N_{BF} = 0$. Delle tre forze rimanenti, due sono parallele a $\mathbf{e}_x$, per cui l'equilibrio lungo $\mathbf{e}_z$ impone che si abbia $N_{BD} = 0$, mentre quello lungo $\mathbf{e}_x$ che N_{AB} sia pari a f_{Bx} . Passando al nodo A, abbiamo ancora tre forze nel piano xz e, per lo stesso ragionamento, si ha $N_{AE} = 0$.

Consideriamo ora lo stesso sistema soggetto al solo carico f_{By} , con $f_{Bx} = 0$. Sul nodo B agiscono tre forze nel piano yz , per cui la quarta, agendo fuori da questo piano, deve essere nulla, cioè $N_{AB} = 0$. Il nodo A è allora sottoposto a

tre forze non complanari che, come sappiamo, non possono essere in equilibrio e devono quindi essere tutte nulle.

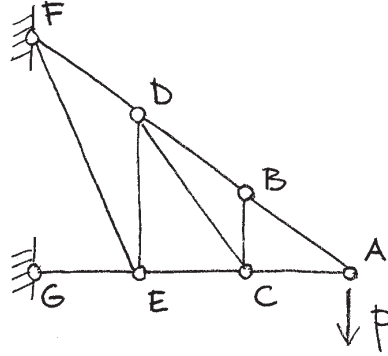


Figura 7.8.

Sul sistema piano in Fig. 7.8. Sul nodo B agiscono tre forze di cui due collineari, l'equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale a $\overline{AF}$, impone che sia $N_{BC} = 0$. Il nodo C è sottoposto a tre forze e ancora due di esse sono parallele a e_x , se ne deduce allora che $N_{CD} = 0$. Possiamo ripetere questo ragionamento per i nodi D e E ricavando che anche N_{DE} e N_{EF} sono nulli.

ESERCIZI

- 30.1. Determinare gli sforzi nelle aste della travatura reticolare di tipo Neville mostrata in Fig. 7.9. Tutte le aste oblique formano un angolo α con l'orizzontale.
- 30.2. Determinare gli sforzi nelle aste della travatura reticolare a 'K' mostrata in Fig. 7.10.
- 30.3. Determinare gli sforzi nelle aste dei sistemi reticolari spaziali in Fig. 7.11, entrambi caricati da una forza $\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + e_y)$. Tutti i nodi sono disposti ai vertici di un cubo di lato l , avente gli spigoli paralleli agli assi coordinati.
- 30.4. Si studi il sistema in Fig. 7.8 sottoposto in C ad un carico $\mathbf{f}_C = -p\mathbf{e}_y$.
- 30.5. Determinare gli sforzi nelle aste della travatura reticolare tridimensionale in Fig. 7.12, studiando separatamente i carichi p_1 e p_2 , entrambi diretti secondo e_z .

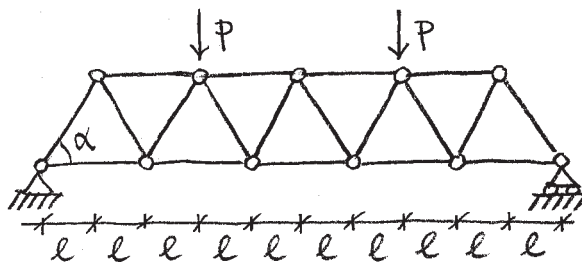


Figura 7.9.

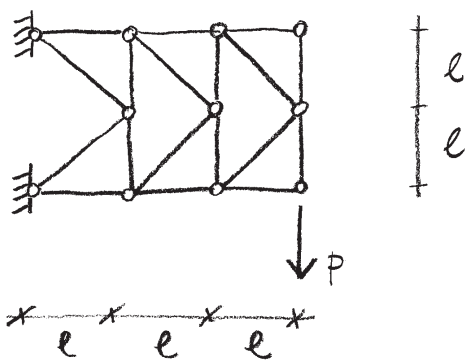


Figura 7.10.

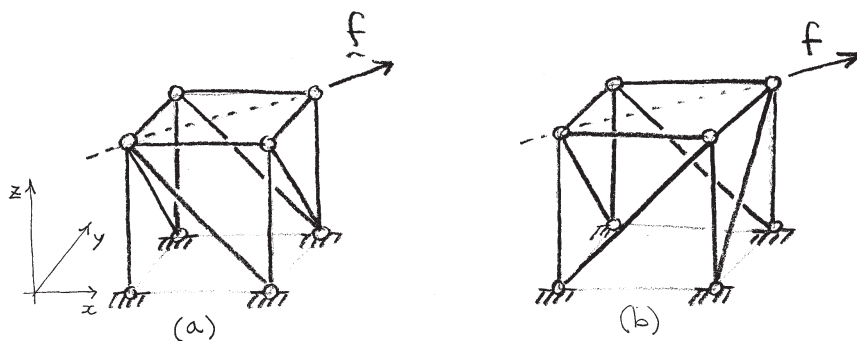


Figura 7.11.

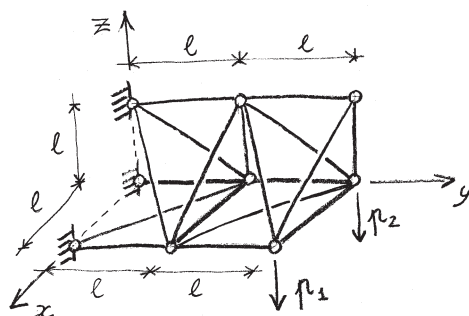


Figura 7.12.

31 Metodo delle sezioni di Ritter

Si possono risolvere le equazioni di equilibrio anche con il metodo degli equilibri parziali e, nell'ambito dei sistemi reticolari piani, si utilizza sovente il metodo delle sezioni di A. Ritter. In questo metodo, la parte di struttura che deve essere in equilibrio viene individuata da una sezione che taglia le aste.

Per esempio, applichiamo questo metodo alla travatura reticolare di tipo Mohniè in Fig. 7.13(a). Determiniamo innanzi tutto le reazioni vincolari. Per

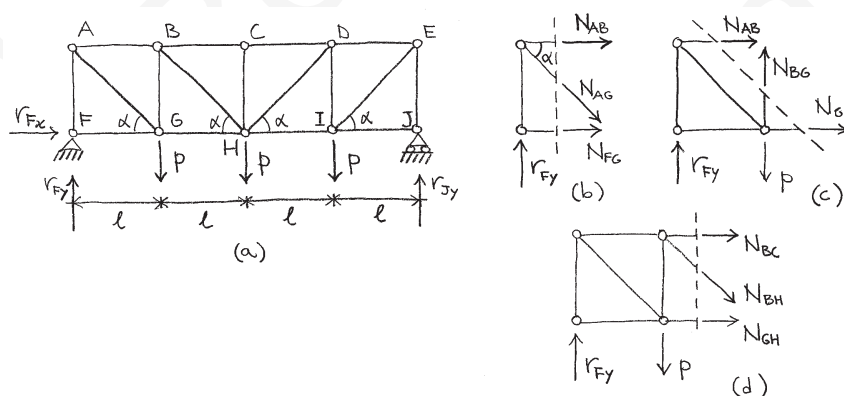


Figura 7.13.

l'intero sistema, il bilancio dei momenti rispetto al nodo F fornisce:

$$4l r_{Jy} - p(l + 2l + 3l) = 0 \iff r_{Jy} = \frac{3}{2}p.$$

Per l'equilibrio alla traslazione si ha:

$$r_{Fx} = 0, \quad r_{Fy} = \frac{3}{2}p$$

Poiché sul nodo F agiscono solo tre forze di cui due collineari, lo sforzo in FG è nullo mentre $N_{AF} = -r_{Fy} = -3/2p$. Adesso, consideriamo la parte di struttura sezionata in Fig. 7.13(b). Abbiamo a disposizione tre equazioni di equilibrio con cui possiamo determinare le incognite N_{AB} , N_{AG} . Dall'equilibrio alla rotazione intorno ad A verifichiamo che $N_{FG} = 0$, infatti tutte le altre forze concorrono in A . Considerando l'equilibrio alla rotazione intorno a G otteniamo:

$$-l r_{Fy} - l \tan \alpha N_{AB} = 0 \iff N_{AB} = -\frac{3p}{2 \tan \alpha},$$

mentre, per l'equilibrio alla traslazione verticale si ha:

$$r_{Fy} - N_{AG} \sin \alpha = 0 \iff N_{AG} = \frac{3p}{2 \sin \alpha}.$$

Come verifica, si vede facilmente che l'equilibrio alla traslazione orizzontale è soddisfatto. Passiamo ad esaminare la parte evidenziata in Fig. 7.13(c) per determinare N_{BG} e N_{GH} . L'equilibrio alla traslazione orizzontale ci dà facilmente

$$N_{GH} = -N_{AB} = \frac{3p}{2 \tan \alpha},$$

mentre per quello alla traslazione verticale si ha

$$r_{Fy} - p + N_{BG} = 0 \iff N_{BG} = -\frac{1}{2}p.$$

Come verifica possiamo controllare che il bilancio dei momenti è soddisfatto. Per la parte di struttura in Fig. 7.13(d) il bilancio dei momenti rispetto ad H fornisce:

$$-2l r_{Fy} + lp - l \tan \alpha N_{BC} = 0 \iff N_{BC} = -\frac{2p}{\tan \alpha}.$$

Per il bilancio delle forze lungo e_y si ha:

$$r_{Fy} - p - N_{BH} \sin \alpha = 0 \iff N_{BH} = \frac{p}{2 \sin \alpha}.$$

Gli sforzi nell'altra metà della travatura possono essere ottenuti per simmetria considerando porzioni di trave analoghe a quelle in Fig. 7.13(b), (c), (d). Infine, lo sforzo nell'asta CH è nullo, poiché corrisponde all'unica azione verticale sul nodo C .

OSSERVAZIONI. 1. Come appena visto, i due metodi, dei nodi e delle sezioni, possono essere utilizzati contemporaneamente per rendere più agevole la risoluzione del problema

2. Non è detto che la sezione che taglia la struttura sia rettilinea, è sufficiente infatti che essa isoli la parte di struttura da considerare. Ad esempio, il sistema in Fig. 7.14(a), che, dopo aver determinato le reazioni vincolari, appare complicato, può essere affrontato effettuando la sezione mostrata in Fig. 7.14(b), che separa il triangolo ACF dalla parte rimanente.

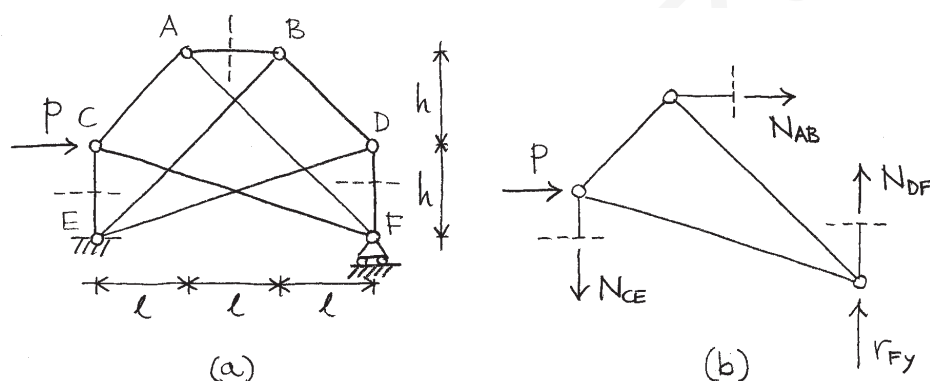


Figura 7.14.

3. In generale, ogni sezione di Ritter permette di scrivere tre condizioni scalari di equilibrio, con le quali è possibile determinare al massimo tre incognite. Nel caso di un sistema tridimensionale, separando una parte dal resto della struttura, possiamo scrivere sei condizioni scalari, tre per l'annullamento del risultante più tre per l'annullamento del momento risultante.

ESERCIZI

- 31.1. Calcolare lo sforzo nell'asta FG della capriata alla francese, detta anche alla Polonceau, in Fig. 7.15.
- 31.2. Calcolare gli sforzi nell'asta verticale centrale della capriata all'inglese in Fig. 7.16. I correnti superiori formano un angolo α con l'orizzontale, i correnti inferiori formano un'angolo β con l'orizzontale.
- 31.3. Trovare gli sforzi nelle aste della travatura di tipo Fink in Fig. 7.17 considerando separatamente i carichi p_1 e p_2 .
- 31.4. La Fig. 7.18 mostra una trave parabolica rovescia sottoposta a forze verticali di entità pari a p applicate ai nodi superiori. Determinare le quote verticali dei nodi inferiori, o, equivalentemente, le lunghezze delle aste verticali, affinché lo sforzo normale in tutte le aste orizzontali sia lo stesso.

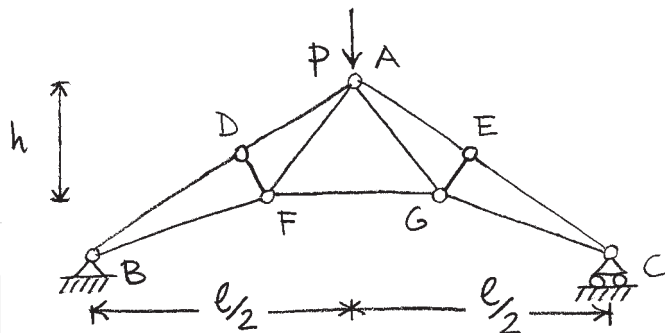


Figura 7.15.

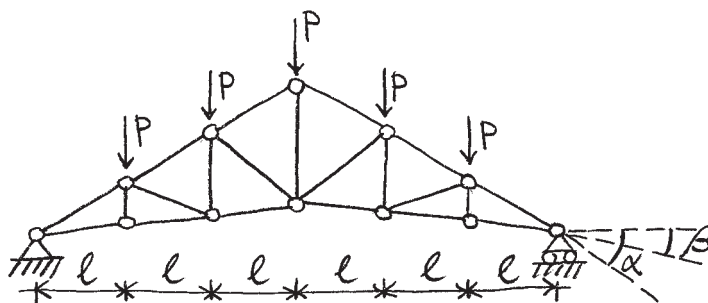


Figura 7.16.

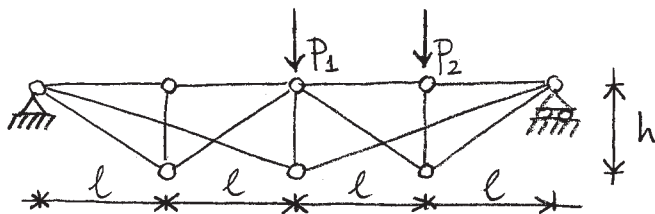


Figura 7.17.

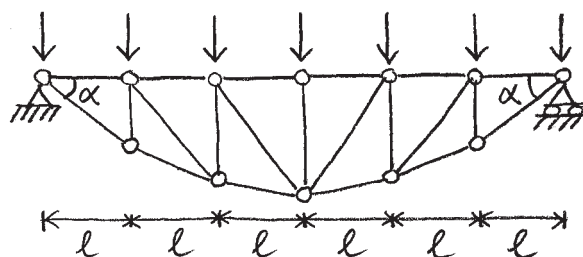


Figura 7.18.

32 Tipologie di sistemi reticolari

32.1 Travature semplici, composte e complesse

Quando un nodo nel piano è collegato a terra da due aste non allineate, la matrice dei coefficienti delle equazioni di equilibrio è quadrata di rango massimo, quindi gli sforzi normali si determinano in modo unico per qualsiasi condizione di carico (Fig.7.19(a)). Se a questo sistema aggiungiamo un nodo, collegato ai precedenti o a terra da altre due aste (Fig.7.19(b)), allora è ovvio che avremo ancora una unica soluzione alle equazioni di equilibrio per ogni condizione di carico. Infatti possiamo risolvere prima le due equazioni di equilibrio alla traslazione del secondo nodo, essendo presenti solo due incognite, e poi quelle del primo, dove ancora abbiamo due incognite. Aggiungendo nodi e aste in questo modo, siamo in grado di assemblare dei sistemi reticolari in cui gli sforzi normali si determinano in modo unico per qualsiasi carico (Fig.7.19(c)). La soluzione del problema si ottiene facilmente risolvendo le equazioni nodo per nodo, procedendo a ritroso rispetto all'ordine in cui i nodi sono stati aggiunti.

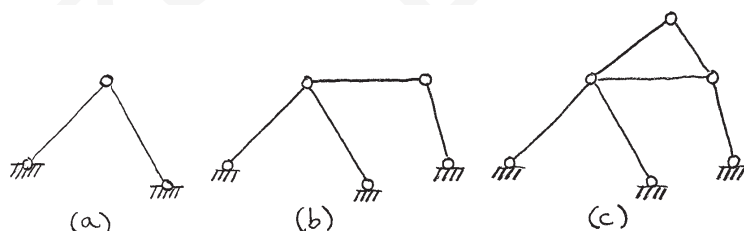


Figura 7.19.

Consideriamo ora tre aste nel piano, incerniate tra loro a formare il triangolo di Fig.7.20(a) e prive di vincoli esterni. Abbiamo visto² come questo sistema si comporti come un corpo rigido. Se a questo corpo rigido connettiamo un altro nodo tramite due aste non allineate (Fig.7.20(b)), otteniamo un nuovo sistema che ancora si comporta come un corpo rigido. In questo modo, aggiungendo ogni volta un nodo e due aste (Fig.7.20(c)), possiamo costruire sistemi reticolari rigidi di qualsiasi dimensione.

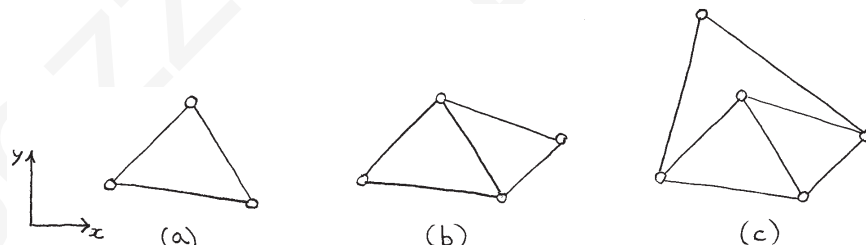


Figura 7.20.

Le travature reticolari costruite come spiegato sopra vengono chiamate *semplici*. Per costruire sistemi semplici tridimensionali, le stesse considerazioni già fatte nel piano possono essere ripetute per il tripode di Fig.7.21(a), con le tre aste non complanari. Ad esempio, le strutture prismatiche in Fig.7.22 costituiscono dei sistemi semplici ottenuti aggiungendo di volta in volta un nodo e tre aste. Ancora, il tetraedro rigido privo di vincoli esterni di 7.21(b) si ottiene collegando un tripode ad un triangolo.

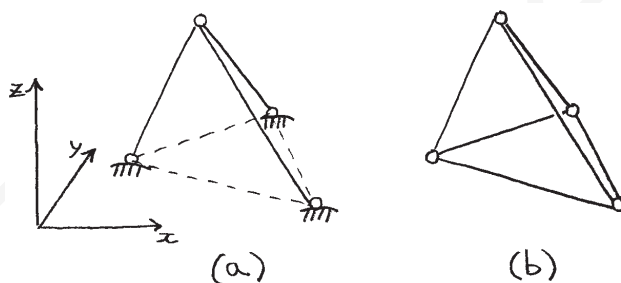


Figura 7.21.

Nei paragrafi precedenti, tutte le travature reticolari mostrate sono semplici, eccetto quella in Fig.7.14 e quella in Fig.7.11(b).

² Sezione 18, Capitolo 4.

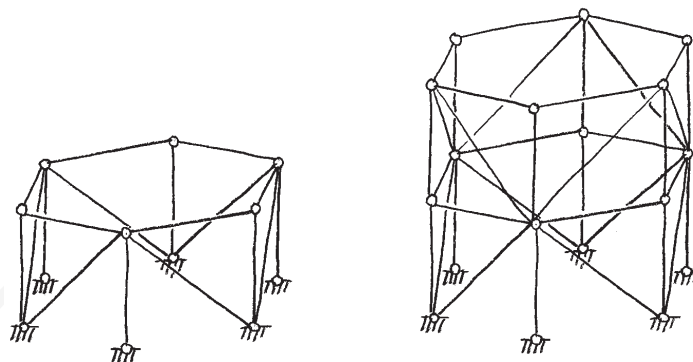


Figura 7.22.

Quando due o più sistemi semplici vengono assemblati insieme si parla di sistemi reticolari *composti*. La Fig.7.14 ne fornisce un esempio, questo sistema è composto da due triangoli rigidi, connessi tra loro mediante tre pendoli. In un sistema composto, ogni sistema reticolare semplice costituisce il singolo elemento di una catena di corpi rigidi. Il sistema può essere allora analizzato sia con il metodo delle sezioni, sia con i metodi esposti nel Capitolo 4. Ad esempio il sistema di Fig.7.23 è un arco a tre cerniere composto da due sistemi semplici $ABCD$ e $AEFG$, dall'equilibrio alla rotazione intorno ad A della parte evidenziata e dall'equilibrio globale possiamo ricavare le reazioni esterne e procedere allo studio di nodi e sezioni di Ritter.

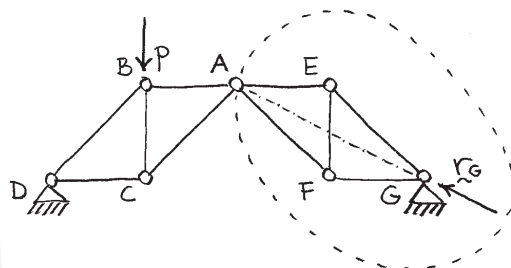


Figura 7.23.

Se un sistema non rientra in nessuna delle due classi precedenti allora si parla di sistemi *complessi*. Il sistema tridimensionale in Fig.7.11(b) ne costituisce un esempio. Per questi sistemi spesso non si può procedere ad una risoluzione spedita delle equazioni di equilibrio. Questo è il caso del sistema piano in Fig.7.24, infatti, una volta determinate le reazioni non possiamo trovare nessun nodo o nessuna sezione da cui poter ricavare direttamente il valore

degli sforzi normali interessati. In questo caso occorre analizzare più nodi o sezioni contemporaneamente.

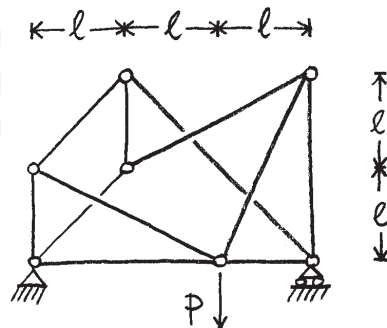


Figura 7.24.

ESERCIZI

- 32.1. Studiare i sistemi composti piani in Fig.7.25(a) e (b).
- 32.2. Per il sistema composto piano in Fig.7.26 determinare lo sforzo nell'asta AB.
- 32.3. Studiare il sistema piano in Fig.7.27.

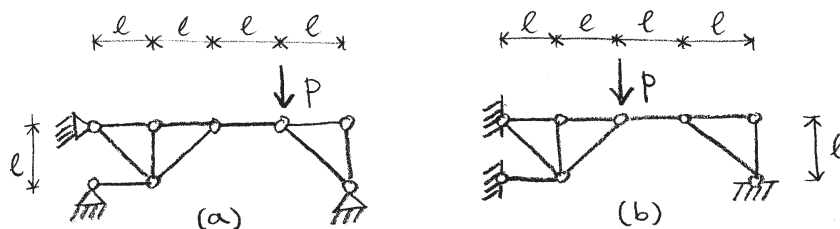


Figura 7.25.

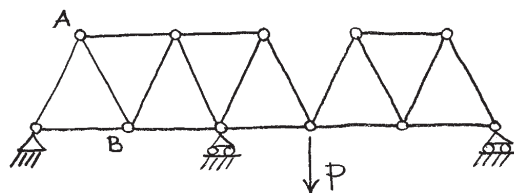


Figura 7.26.

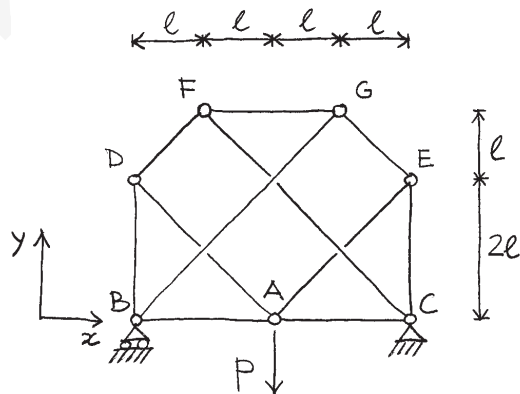


Figura 7.27.

32.2 Sistemi sottodeterminati e sovradeterminati

Supponiamo di avere una travatura reticolare semplice come il sistema mostrato in Fig.7.28(a). Le equazioni di equilibrio ammettono una soluzione unica ed il sistema si dice *staticamente determinato*. Se aggiungiamo un'asta a questo sistema, come in Fig.7.28(b), allora avremo una incognita in più rispetto al numero di equazioni a disposizione e di conseguenza la soluzione non è unica ma ci saranno infinite soluzioni per ogni condizione di carico. In questo caso il sistema si dice *staticamente sottodeterminato*: le equazioni non sono in numero sufficiente a determinare le incognite.

Ora, rimuoviamo un'asta dallo stesso sistema semplice di partenza, ottenendo il sistema in Fig.7.28(c). Abbiamo adesso una equazione in più rispetto al numero di incognite. La matrice completa del sistema, costruita con il vettore dei termini noti, è quadrata e, a seconda dei casi, può avere caratteristica uguale o maggiore di quella della matrice non completa. Nel primo caso la soluzione esiste ed è unica, nel secondo non esiste. Ad esempio, nel caso di Fig.7.28(c), se si applica una forza orizzontale al nodo C, allora è possibile determinare gli sforzi nelle aste, mentre applicando una forza orizzontale al nodo A la soluzione delle equazioni di equilibrio non esiste. Il sistema si dice allora *staticamente sovradeterminato*: le equazioni da soddisfare sono troppe

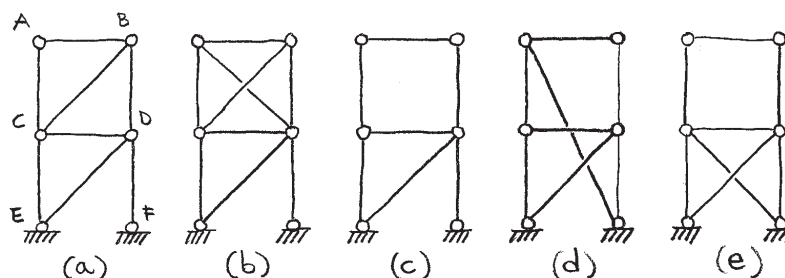


Figura 7.28.

rispetto alle incognite e la soluzione esiste solo per particolari condizioni di carico.

A questo punto possiamo chiederci che cosa succede se, a partire dal sistema semplice iniziale, si sostituisce un'asta con un'altra differente, come in Fig.7.28(d) e (e). Abbiamo due possibilità, la prima e quella per cui esiste ancora una soluzione unica per ogni condizione di carico (Fig.7.28(d)), la seconda è quella che il sistema diventi contemporaneamente sottodeterminato e sovradeterminato (Fig.7.28(e)). Può succedere infatti che la nuova asta vada ad aggiungersi ad un sottosistema che era già semplice, il quale diventa sottodeterminato, mentre la parte rimanente priva di un'asta diventa sovradeterminata. La soluzione esiste allora solo per particolari condizioni di carico ed inoltre se esiste non è unica.

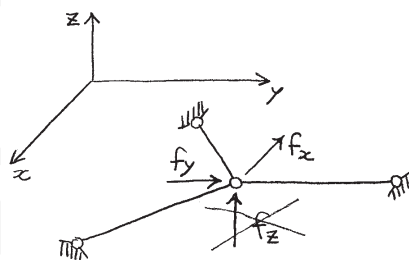


Figura 7.29.

Un altro tipo di sistemi contemporaneamente sotto- e sovradeterminati sono quelli che possiedono una geometria particolare, per cui la matrice dei coefficienti non ha caratteristica massima. Questo è il caso di un arco a tre cerniere allineate³ oppure di un tripode con aste complanari. Infatti, poiché il sistema in Fig.7.29 ha le tre aste in un piano orizzontale, non esiste soluzione

³ Sezione 16.2, Capitolo 4.

se il carico ha una componente verticale, mentre ci sono infinite soluzioni se il carico agisce nel piano orizzontale.

ESERCIZI

32.4. Per il sistema in Fig. 7.30 determinare per quali valori dei parametri di carico il sistema è in equilibrio.

32.5. Determinare gli sforzi nella struttura in Fig. 7.31 quando $f_A = 0$.

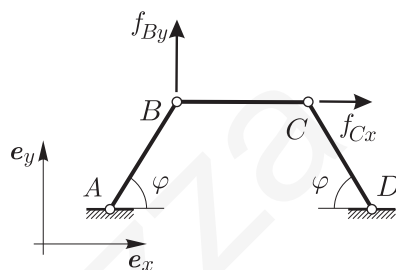


Figura 7.30.

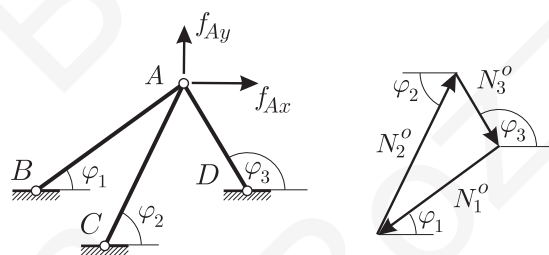


Figura 7.31.

32.3 Regola di Maxwell

Ovviamente, nella risoluzione delle equazioni di equilibrio, la situazione più favorevole è quella per cui la matrice dei coefficienti è quadrata di rango massimo. La regola di Maxwell consiste in un conteggio di equazioni e incognite per avere una prima idea sulla natura del sistema in esame. Indicando con n_n il numero di nodi liberi e con n_a il numero di aste, per avere lo stesso numero di equazioni ed incognite occorre avere

$$2n_n = n_a \quad \text{oppure} \quad 3n_n = n_a,$$

rispettivamente nel piano o nello spazio. Se consideriamo anche i nodi vincolati nella valutazione di n_n , indicando con n_v il numero di vincoli scalari, si deve avere:

$$2n_n = n_a + n_v \quad \text{oppure} \quad 3n_n = n_a + n_v.$$

Quando il numero di nodi è maggiore [minore] rispetto al numero di aste e vincoli necessari secondo questa regola, allora il sistema è staticamente sovradeterminato [sottodeterminato]. Comunque, in tutti i casi in cui la matrice dei coefficienti non ha caratteristica massima si ha che il sistema è sia sovradeterminato che sottodeterminato.

